演習問題 29 ● ジョルダン標準形(Ⅱ)の(ⅳ)への変換 ●

$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&2&-2\\1&1&3\end{bmatrix}$ を，変換行列 P を用いて，$P^{-1}AP$ によりジョルダン標準形に変換せよ。

ヒント！ 固有方程式 $|T|=|A-\lambda E|=0$ の解が，$\lambda_1=2$ (3重解) となるので，(ⅰ) $T_1\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$ より，$\boldsymbol{x}_1$ を定め，(ⅱ) $T_1\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{x}_1$ より，$\boldsymbol{x}_1'$ を定め，さらに (ⅲ) $T_1\boldsymbol{x}_1''=\boldsymbol{x}_1'$ より，$\boldsymbol{x}_1''$ を定めるんだね。その結果，変換行列 P が，$P=[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_1'\ \boldsymbol{x}_1'']$ で求められるので，$P^{-1}AP$ により，A はジョルダン標準形 $\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$ に変換できる。

解答＆解説

$T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ……① ただし，$T=A-\lambda E=\begin{bmatrix}1-\lambda&-1&1\\0&2-\lambda&-2\\1&1&3-\lambda\end{bmatrix}$ より，

固有方程式：$|T|=0$ を解くと，

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1\\0&2-\lambda&-2\\1&1&3-\lambda\end{vmatrix}=\boxed{(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)+2-(2-\lambda)+2(1-\lambda)=0}$$

$-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)+(\lambda-2)\quad -2(\lambda-2)=0$ 両辺に -1 をかけて，

$(\lambda-2)\underbrace{(\lambda^2-4\lambda+3-1+2)}_{\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2}=0$ より，$(\lambda-2)^3=0$

$\therefore\ \lambda=2$ (3重解) となるので，これを $\lambda_1=2$ とおき，このときの T を，T_1 とおくと，(ⅰ) $T_1\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$ から，$\boldsymbol{x}_1$ を定め，

(ⅱ) $T_1\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{x}_1$ から，$\boldsymbol{x}_1'$ を定め，

(ⅲ) $T_1\boldsymbol{x}_1''=\boldsymbol{x}_1'$ から，$\boldsymbol{x}_1''$ を定める。

そして，求める変換行列 P は，$P=[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_1'\ \boldsymbol{x}_1'']$ として求められる。

(ⅰ) $\lambda_1 = 2$ のとき，

①を，$T_1\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ とおき，

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ とおくと，

$\cdot T_1 = \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda_1 & -2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda_1 \end{bmatrix}$

$\cdot \lambda_1 = 2$（3重解）

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{より，}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \left.\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} r = 2$$

rank $T_1 = 2$，自由度 $3 - 2 = 1$

$\therefore \alpha_1 = 1$ とおく

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \cancel{- \alpha_3} = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

ここで，$\alpha_1 = 1$ とおくと，$\alpha_2 = -1$

$$\therefore \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots \text{②と定められる。}$$

(ⅱ) 次に，新たな未知ベクトルを $\boldsymbol{x}_1{}' = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$ とおいて，これを，方程式：

$T_1\boldsymbol{x}_1{}' = \boldsymbol{x}_1$ から定める。

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{より，}$$

$$T_{1a} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left.\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\right\} r = 2$$

rank T_{1a} = rank $T_1 = 2$ より，自由度 1

$\therefore \beta_2 = 0$ とおく

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = -1 \\ 2\beta_3 = 1 \end{cases}$$

$\beta_3 = \dfrac{1}{2}$ より，ここで，$\beta_2 = 0$ とおくと，

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \boldsymbol{x}_1{}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(iii) さらに，新たな未知ベクトルを $\boldsymbol{x}_1'' = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$ とおいて，これを方程式：

$T_1\boldsymbol{x}_1'' = \boldsymbol{x}_1'$ から定める。

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ より，

$$T_{1a}' = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left.\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\right\} r = 2$$

$\mathrm{rank}\,T_{1a}' = \mathrm{rank}\,T_1 = 2$ より，自由度 1

$\therefore \gamma_2 = 0$ とおく

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 - \cancel{\gamma_3} = \dfrac{1}{2} \\ \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

ここで，$\gamma_2 = 0$ とおくと，$\gamma_1 = \dfrac{1}{2}$

$$\therefore \boldsymbol{x}_1'' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

以上より，$P = [\boldsymbol{x}_1 \ \boldsymbol{x}_1' \ \boldsymbol{x}_1''] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ とおくと，A は，

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ と，ジョルダン標準形に変換される。………(答)

参考

掃き出し法により，P^{-1} を求めると $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ より，$P^{-1}AP$ を実際に計算すると，

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

となって，間違いないことが確認できる。