◆◆ Appendix(付録)・代数学の基本定理 ◆◆

それでは，これから有名な“代数学の基本定理”について解説しよう。この定理そのものは，z の n 次方程式の複素数解についてのシンプルな定理なんだけれど，その証明には多くの数学者達を悩ませてきた難問でもあったんだね。でも，これまで学んだ複素関数の知識をうまく活用して，この問題にもチャレンジしてみよう。

● まず，代数学の基本定理を紹介しよう！

それでは，これから“代数学の基本定理”(*fundamental theorem of algebra*) について，解説しよう。まず，この定理を紹介しよう。

代数学の基本定理

次の z の n 次方程式は，少なくとも 1 つの複素数の解をもつ。

$z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ ……①

$(a_1,\ a_2\cdots\cdots,\ a_n$: 複素数の係数，ただし，$a_n \fallingdotseq 0$ とする $)$

z の n 次方程式は，一般的に，

$a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ ……①′ $(a_0 \fallingdotseq 0)$

と与えられるけれど，①′ の両辺を $a_0(\fallingdotseq 0)$ で割って，

各係数 $\dfrac{a_1}{a_0},\ \dfrac{a_2}{a_0},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{a_{n-1}}{a_0},\ \dfrac{a_n}{a_0}$ を新たに $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_{n-1},\ a_n$ とおけば，①の形の z の n 次方程式が得られるんだね。つまり，z^n の係数は 1 とおいても，一般性は失わない。

ここで，①の左辺の z の n 次多項式 (n 次式) を

$f_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n$ ……② $(a_n \fallingdotseq 0)$

とおくと，代数学の基本定理は，

「$f_n(z)=0$ ……①　をみたす複素数 (解) が少なくとも 1 つ存在する。」

と言っているんだね。ここで , この解を $z=z_1$ とおくと , 当然

$f_n(z_1)=0$ ……③　となるね。

すると , ③より“因数定理”を用いると，$f_n(z)$ は必ず $z-z_1$ で割り切れる。

つまり，$f_n(z)$ は

$f_n(z) = (z - z_1)f_{n-1}(z)$ ……④　と変形できるんだね。

z の $n-1$ 次多項式

この因数定理についても，キチンと解説しておくと，次のようになる。

まず，$f_n(z)$ と $f_n(z_1)$ を列記すると，

$$\begin{cases} f_n(z) = z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1}z + a_n \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ f_n(z_1) = z_1{}^n + a_1z_1{}^{n-1} + a_2z_1{}^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1}z_1 + a_n \cdots\cdots ③' \end{cases}$$ だね。

ここで，②－③′ より，

$$f_n(z) - f_n(z_1) = (z^n - z_1{}^n) + a_1(z^{n-1} - z_1{}^{n-1}) + a_2(z^{n-2} - z_1{}^{n-2}) + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-1}(z - z_1) \cdots\cdots ⑤$$

これは，$f_n(z)$ のこと
($\because f_n(z_1) = 0$)

となる。よって，各 $z^k - z_1{}^k (k = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ が，$(z - z_1)$ を因数にもつことを示せばいい。

ここで，$1 - r^k = (1 - r)(1 + r + r^2 + \cdots\cdots + r^{k-1})$ ……⑥　となるのは

$r \fallingdotseq 1$ のとき，等比数列の和の公式：
$1 + r + r^2 + \cdots\cdots + r^{k-1} = \dfrac{1 - r^k}{1 - r}$ の両辺に，$1 - r$ をかけたものだね

大丈夫だね。次に，この⑥の r に $r = \dfrac{z_1}{z}$ を代入すると，

$$1 - \left(\frac{z_1}{z}\right)^k = \left(1 - \frac{z_1}{z}\right)\left\{1 + \frac{z_1}{z} + \left(\frac{z_1}{z}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{z_1}{z}\right)^{k-1}\right\} \cdots\cdots ⑥'$$

となる。よって，この⑥′ の両辺に z^k をかけると，

$$z^k - z_1{}^k = z\left(1 - \frac{z_1}{z}\right) \cdot z^{k-1}\left(1 + \frac{z_1}{z} + \frac{z_1{}^2}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{z_1{}^{k-1}}{z^{k-1}}\right)$$

$z^k - z_1{}^k = (z - z_1)(z^{k-1} + z_1z^{k-2} + z_1{}^2z^{k-3} + \cdots\cdots + z_1{}^{k-1})$　となるので，

$z^k - z_1{}^k (k = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ は必ず $(z - z_1)$ を因数にもつことがわかった。

よって，⑤は，

$$f_n(z)=\underbrace{(z^n-z_1{}^n)}_{(z-z_1)\text{を因数にもつ}}+a_1\underbrace{(z^{n-1}-z_1{}^{n-1})}_{(z-z_1)\text{を因数にもつ}}+a_2\underbrace{(z^{n-2}-z_1{}^{n-2})}_{(z-z_1)\text{を因数にもつ}}+\cdots\cdots+a_{n-1}(z-z_1)$$

となるので，$f_n(z)$ の右辺から，$(z-z_1)$ をくくりだすことができて，

$f_n(z)=(z-z_1)\cdot\underbrace{f_{n-1}(z)}_{\text{これは，}z\text{ の }n-1\text{ 次式}}\cdots\cdots④$　の形で表すことができる。

← $f_n(z)$ を $(z-z_1)$ で割った商

よって，代数学の基本定理を用いれば，z の n 次方程式：

$f_n(z)=0\cdots\cdots①$　は

$f_n(z)=(z-z_1)\cdot f_{n-1}(z)=0\cdots\cdots⑦$　と，変形できる。

すると，同様に，この定理より，z の $n-1$ 次方程式 $f_{n-1}(z)=0$　も少なくとも 1 つの解 z_2 をもつはずだから

$f_{n-1}(z)=(z-z_2)\underbrace{f_{n-2}(z)}_{z\text{ のある }n-2\text{ 次式}}$ と表せる。さらに，同様に，この定理より，

$f_{n-2}(z)=0$ も，少なくとも 1 つの解 z_3 をもつはずだから

$f_{n-2}(z)=(z-z_3)f_{n-3}(z)$　となる。

…………………………………………………………………

以下，同様の操作を繰り返すと，結局①の方程式は，

$f_n(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\cdots\cdots(z-z_n)=0\cdots\cdots⑦'$

となることが，ご理解頂けるはずだ。

つまり，代数学の基本定理：

「z の n 次方程式，$f_n(z)=0$ は少なくとも 1 つの複素数解をもつ」

は，

「z の n 次方程式，$f_n(z)=0$ は，n 個の複素数の解をもつ」

この場合，重解は 2 個，3 重解は 3 個，……のように，解の個数を数えているんだね。

と言い換えてもいい。つまり，この 2 つが同値であることが分かったんだね。

代数学の基本定理を証明しよう！

それでは，代数学の基本定理：すなわち，z の n 次多項式を

$f_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1} z + a_n$ ……②

$(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$: 複素定数係数 $(a_n \fallingdotseq 0)$, z : 複素変数)

とおいたとき，z の n 次方程式：

$f_n(z) = 0$ ……①　が，

少なくとも 1 つの複素数の解 z_1 をもつこと，すなわち

$f_n(z) = 0$　をみたす複素定数 z_1 が必ず 1 つは存在することをこれから証明してみよう。

まず，②の右辺から，z^n をくくり出すと

$$f_n(z) = \underbrace{z^n}_{\omega}\underbrace{\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{a_n}{z^n}\right)}_{\zeta}$$ ……②′ となる。

ここで，
$$\begin{cases} \omega = z^n & \cdots\cdots⑧ \\ \zeta = 1 + \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \cdots\cdots + \dfrac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \dfrac{a_n}{z^n} & \cdots\cdots⑨ \end{cases}$$

とおくと，②′ は

$f_n(z) = \omega \cdot \zeta$ ……②″ となる。

ここで，$z = re^{i\theta}$, また $\omega = Re^{i\Theta}$ と，極形式で表すことにしよう。

さらに，z の絶対値 $|z| = r$ は，$r >> 1$ のように，十分に大きな値の実数定数とし，また，z の偏角 $\arg z = \theta$ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を変化する変数と考えよう。

すると，⑧より

$\omega = R \cdot e^{i\Theta} = z^n = (re^{i\theta})^n = r^n \cdot e^{in\theta}$ ……⑧′ となる。

(r : 十分な大きな実数定数，θ : $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲の変数)

これから，$R = r^n$，$\Theta = n\theta$　となるのはいいね。

$f_n(z) = \omega \cdot \zeta$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ ②″

$\begin{cases} \omega = z^n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧ \\ \zeta = 1 + \dfrac{a_1}{z} + \cdots\cdots + \underset{(a \fallingdotseq 0)}{\dfrac{a_n}{z^n}} & \cdots ⑨ \end{cases}$

したがって，図 **1(i)** に示すように，点 z は z 平面上で，原点を中心とし，十分に大きな半径 r の円を **1** 周分描くことになる。

このとき，$\omega = Re^{i\Theta}$ は

$R = r^n$，$\underline{\Theta = n\theta}$ より，

$\boxed{\begin{array}{l} 0 \leqq \theta < 2\pi \\ 0 \leqq \Theta < 2n\pi \end{array}}$

図 **1(ii)** に示すように，点 ω は平面上で，原点を中心とし，z よりもさらにずっと大きな半径 $R(=r^n)$ の円を n 周分描くことになるんだね。

ここで，図 **1(ii)** では描きづらいんだけれど，点 ω の描く n 周分の円の出発点と終点は，当然一致することに気を付けよう。

これで，ω の解説は終わったので，次に，関数 ζ (ゼータ) についても考えてみよう。このキー・ポイントも，z の絶対値 $|z| = r$ が十分に大きな数であることなんだね。したがって，

図 **1**　$z = r \cdot e^{i\theta}$　$\omega = Re^{i\Theta}$
(r: 十分大きな重数，$0 \leqq \theta < 2\pi$)

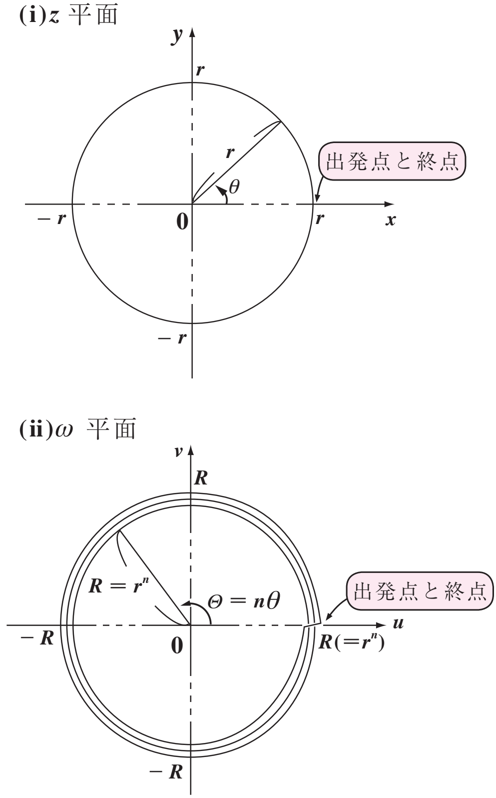


図 **1(ii)** は，$n = 3$ のときイメージ。
つまり，ω は半径 r^n の円を **3** 周分描く。

$$\zeta = 1 + \underbrace{\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{a_n}{z^n}}_{\text{これは，ほとんど無視できる}} \cdots\cdots ⑨$$

の右辺の $\mathbf{1}$ 以外の項は，

$$\frac{a_1}{z} = \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{十分に小さな数}} \cdot a_1 e^{-i\theta},\ \frac{a_2}{z^2} = \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{\text{十分に小さな数}} \cdot a_2 e^{-2i\theta},\ \cdots\cdots,\ \frac{a_n}{z^n} = \underbrace{\frac{1}{r^n}}_{\text{十分に小さな数}} \cdot a_n e^{-in\theta}$$

となって，変数ではあるけれど，その変動は十分に小さいと考えることができる。

つまり，⑨の ζ は，もちろんわずかな変化はするけれど，

$\zeta \fallingdotseq 1 \cdots\cdots$ ⑨′　と考えることができるんだね。

以上より，

$$f_n(z) = \underbrace{\omega}_{\text{半径}\,R\,\text{の円を}\,n\,\text{周分描く}} \cdot \underbrace{\zeta}_{\fallingdotseq 1} \cdots\cdots ②''$$

から，$f_n(z)$ が複素数平面上に描く図形は，ω とほぼ同様だけれど，ζ のわずかな変動により，多少凹凸のある半径の十分大きな円に近い曲線を n 周分描くことになるんだね。ここで $\theta = 0$ のときの出発点と，$\theta = 2\pi$ のときの終点の位置は一致する。(ζ の影響で，この出発点 (終点) は，実軸上の点ではなくなってはいるが ……)

図 2　$r >> 1$ のときの $f_n(z) = \omega \cdot \zeta$ のグラフのイメージ

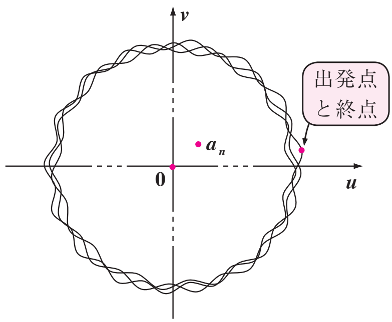


図 2 は，$n = 3$ のイメージ

したがって，$r >> 1$ のとき，$f_n(z)$ のグラフは，原点 $\mathbf{0}$ と定点 a_n をその内部に含む，円に近い n 周する閉曲線になっていることに，気を付けよう。

$$\boxed{f_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1} z + a_n \cdots\cdots ② \quad (a_n \neq 0)}$$

ここで，$f_n(z)$ の定数項 a_n が突然出てきたと思うかも知れないね。実は，これが重要なんだ。では，仕上げに入ろう。

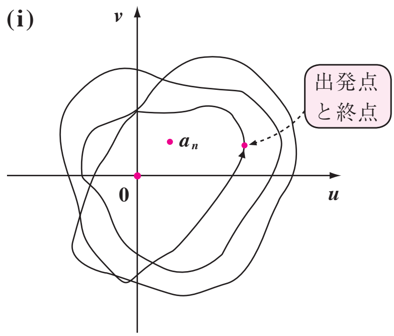
これまで，$r >> 1$ として，$r(=|z|)$ を十分大きな定数と考えてきたけれど，今度は逆に，この r の値を 0 に限りなく近づけたときの $f_n(z)$ を調べてみよう。すると，$\lim_{r\to 0} z^k = \lim_{r\to 0} \underbrace{r^k}_{0} e^{ik\theta} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ より

$$\lim_{r\to 0} f_n(z) = \lim_{r\to 0}(\cancel{\underbrace{z^n}_{0}} + \cancel{a_1\underbrace{z^{n-1}}_{0}} + \cancel{a_2\underbrace{z^{n-2}}_{0}} + \cdots\cdots + \cancel{a_{n-1}\underbrace{z}_{0}} + a_n) = a_n$$

となる。

したがって，r が十分大きいときから，r を 0 に近づけていくと，n 周していた閉曲線は図 3(i)，(ii) に示すように縮んで点 $a_n(\fallingdotseq 0)$ を囲む閉曲線になるため，必ず，その過程で，原点 0 を通過するときが存在する。

図 3　r を 0 に近づけるときの $f_n(z)$ のグラフ



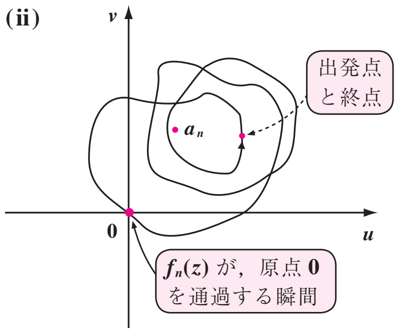


図 3 は，$n = 3$ のイメージ

ここで，n 周する閉曲線が，$r \to 0$ の過程で，原点 0 を n 回通過するとは限らない。たとえば，
$f_3(z) = (z - i)^3 = 0$ のとき
$z = i$ (3 重解) をもつので，
3 重曲線 $f_3(z)$ が，$r \to 0$ の過程で，原点を通過するのは，1 回だけになる。

(これについては，後でそのグラフを具体的に示そう)

しかし，いずれにせよ，少なくとも 1 回は，$f_n(z)$ の曲線は原点 0 を通過するので，そのときの z を $z = z_1$ とおくと，
$f_n(z_1) = 0$ をみたす z_1 が，少なくとも 1 つは存在することになる。

つまり，代数学の基本定理：

「z の n 次方程式 $f_n(z)=0$ は，少なくとも 1 つの複素数解 z_1 をもつ。」

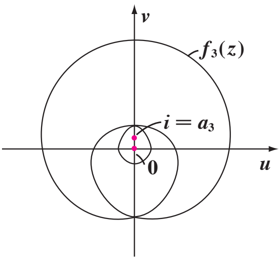
が成り立つことが，示せたんだね。そして，これと同値な命題：

「z の n 次方程式 $f_n(z)=0$ は，n 個の複素数解をもつ」

が真であることも，同時に示せたんだね。納得いった？

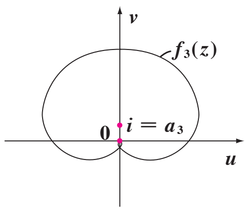
では，最後に，3 重解 i をもつ 3 次方程式 $f_3(z)=(z-i)^3=0$ について，$r=3,\ 1,\ 0.5$ のとき，コンピューターで求めた曲線 $f_3(z)=z^3-3iz^2-3z+\underbrace{\boxed{i}}_{a_3}$ のグラフを下に示そう。

(i) $r=3$ のとき



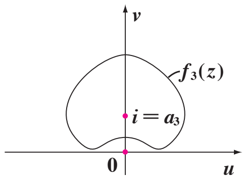
（r はずい分小さくなっているが，まだ，3 周する閉曲線が 0 と $a_3(=i)$ を囲んでいる。）

(ii) $r=1$ のとき



（曲線 $f_3(z)$ が原点 0 を通過する瞬間だね。そして，今回は，この 1 回のみだ。）

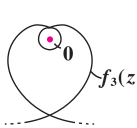
(iii) $r=0.5$ のとき



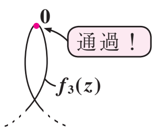
（r がさらに小さくなって，$f_3(z)$ は $a_3(=i)$ のみを 1 周分だけ囲む閉曲線になった。）

ここで，$r=1.2,\ 1,\ 0.9,\ 0.8$ のときの原点 0 の付近の曲線 $f_3(z)$ を示すと，次のようになる。

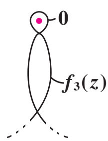
・$r=1.2$ のとき



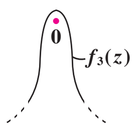
・$r=1$ のとき



・$r=0.9$ のとき



・$r=0.8$ のとき



このように，r が 3 から 0 に近づくとき，3 周する閉曲線 $f_3(z)$ は，原点 0 を 1 回だけ通過することが分かるんだね。当然 $f_3(z)=0$ をみたす z は，3 重解 $i=1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\left(r=1,\ \theta=\frac{\pi}{2}\right)$ なんだね。3 重の閉曲線が点 $a_3=i$ に向かって縮んでいくときに，ただ 1 回のみ原点を通過するプロセスがヴィジュアルに分かって面白かったでしょう？