演習問題 13　● ガウスの発散定理 ●

空間ベクトル場 $\boldsymbol{f}=\left[\frac{x^3}{3},\ \frac{y^3}{3},\ \frac{z^3}{3}\right]$ において，原点 $\mathbf{0}$ を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の球面：$x^2+y^2+z^2=5$ を閉曲面 S とおく。このとき，面積分 $\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ。(ただし，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S の内部から外部に向かう向きをとるものとする。)

ヒント！ これも，ガウスの発散定理：$\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{f}\,dV$ を使って，体積分にもち込んで解けばいい。ただし，今回の体積分では，球座標，すなわち，$x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$　$(0\leqq\theta\leqq\pi,\ \ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi,\ \ 0\leqq r\leqq\sqrt{5})$ を利用すると，計算が楽になるんだね。この場合のヤコビアン J の求め方とその結果もマスターすることだね。頑張ろう！

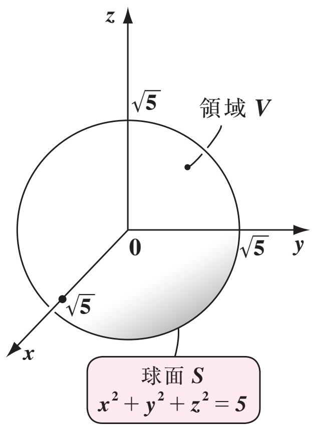
解答＆解説

右図に示すような球面 S：

$x^2+y^2+z^2=5$ ……①

原点 $\mathbf{0}$ を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の球面

で囲まれる領域を V とおく。



ここで，ベクトル場 $\boldsymbol{f}=\left[\frac{x^3}{3},\ \frac{y^3}{3},\ \frac{z^3}{3}\right]$

の発散をとると，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^3}{3}\right)$$

$$=x^2+y^2+z^2 \quad\cdots\cdots②$$ となる。

よって，求める面積分はガウスの発散定理を用いると，②より

$$\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{f}\,dV$$

$$=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz \quad\cdots\cdots③$$ となる。

ここで，xyz 座標を球座標に変換すると，

$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$,

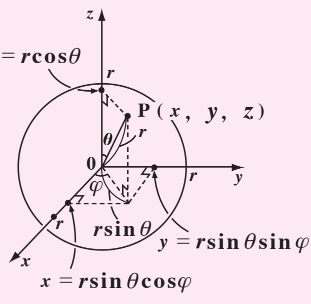
$z = r\cos\theta$

$(0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ 0 \leqq r \leqq \sqrt{5})$

となる。ここで，

$x_r = \dfrac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi$,

$x_\theta = \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi$, ……などより，



(球座標)

このときのヤコビアン J は，

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

サラスの公式

$$= r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi$$

$$= r^2\sin\theta\cos^2\theta(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{1}) + r^2\sin^3\theta(\underbrace{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}_{1})$$

この結果は覚えよう！

$$= r^2\sin\theta\cos^2\theta + r^2\sin^3\theta = r^2\sin\theta(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1}) = r^2\sin\theta \quad \cdots\cdots ④$$ となる。

よって④より，　$dxdydz = |J|drd\theta d\varphi = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ ……⑤

となる。ゆえに，③は

$$\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$$

$r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta$
$= r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$

$r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

球座標変換のとき，
$dxdydz$
$= r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$
となる。これは，公式として覚えておこう！

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{5}} r^2\cdot r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

$r,\ \theta,\ \varphi$ について，それぞれ独立して積分できる！

$$= \int_0^{\sqrt{5}} r^4 dr \cdot \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$\left[\dfrac{1}{5}r^5\right]_0^{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}$　　$-[\cos\theta]_0^{\pi} = 1+1 = 2$　　$[\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi$

$= 5\sqrt{5}\times 2\times 2\pi = 20\sqrt{5}\pi$　となる。…………………………(答)