では，推移確率行列 M が 3 行 3 列となる，より本格的な場合のマルコフ過程の例題も解いてみよう。

(ex2) 確率分布 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ が，次式をみたすものとする。

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} \cdots\cdots ①$$

(ただし，$a_n + b_n + c_n = 1 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ とする。)

このとき，$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ が存在するものとして，$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ を求めよう。

これまでの解説から，初期分布 $[a_0\ b_0\ c_0]$ に関わらず，$n \to \infty$ としたときの定常状態の分布 $[\alpha\ \beta\ \gamma]$ が決まることが予想できると思う。

ここで，$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ と仮定すると，$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ となるので，

$n \to \infty$ のとき，① は，

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \cdots\cdots ①' \text{ となる。}$$

これは，$E \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ とおける。

これが，今回のマルコフ過程の推移確率行列 M のことである。各列の和が 1 (全確率) になっていることに注意しよう。

①′ より，

$$\underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}}_{M-E\text{ のこと}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{よって，}$$

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & -0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & -0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots ②$$

となる。よって，②を変形して，

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ となる。

行列 $M-E$ の行基本変形

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & -0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & -0.6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left.\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} r=2$$

行基本変形による連立1次方程式の解法をご存知ない方は「**線形代数キャンパス・ゼミ**」で勉強して下さい。

これから，

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 & \cdots\cdots ③ \\ -3\beta + 8\gamma = 0 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$ が導ける。

③，④と，確率分布の必要条件の式

$\alpha + \beta + \gamma = 1$（全確率）$\cdots\cdots$⑤ と併せて

α, β, γ の値を求めると，

$$\alpha = \frac{5}{16},\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = \frac{3}{16}$$ となる。

⑤－③より，$2\beta = 1 \quad \therefore \beta = \frac{1}{2}$

④より，$-\frac{3}{2} + 8\gamma = 0 \quad \therefore \gamma = \frac{3}{16}$

⑤より，$\alpha + \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{5}{16}$

よって，$n \to \infty$ のときの極限の確率分布，すなわち定常状態の確率分布は，

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$ となるんだね。

参考

行列 M の特性方程式 $|M - \lambda E| = 0$ から，固有値 λ の値を求める。次に，それぞれの λ の値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を決定して，

変換行列 P を $P = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3]$ から求めると，行列 M は $P^{-1}MP$ により対角化

されて，$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ となる。この両辺を n 乗して，左から P，右から

P^{-1} をかけると，M^n が求まる。ここで $n \to \infty$ の極限をとると，

$\lim_{n\to\infty} M^n = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 8 & 8 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ と求まる。よって，$\lim_{n\to\infty} M^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ から

定常状態の分布が求められる。これが，正式な解法なんだね。やる気のある方は確認しよう！