● $\frac{0}{0}$ の極限の不定形は，ロピタルの定理を利用できる！

微分法の応用として，ロピタルの定理についても解説しておこう。

ロピタルの定理

ある領域で正則な **2** つの複素関数 $f(z)$ と $g(z)$ について，
$f(\alpha)=g(\alpha)=0$ であり，$f'(\alpha)$ と $g'(\alpha)$ が存在し，かつ $g'(\alpha)\neq 0$ のとき，
次式が成り立つ。

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to\alpha}\frac{f'(z)}{g'(z)}\quad\cdots\cdots\cdots(\,*\,)$$

$f(\alpha)=g(\alpha)=0$ より，

$((\,*\,)$ の左辺 $)=\lim_{z\to\alpha}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{0}{0}$ の不定形となるんだけれど，

これは，分子・分母を z で微分したものの極限 $\lim_{z\to\alpha}\frac{f'(z)}{g'(z)}$ $(=(\,*\,)$ の右辺 $)$

と一致すると言っているんだね。

ではまず，$(\,*\,)$ の公式が成り立つことを証明しておこう。

$$((\,*\,)\text{の右辺})=\lim_{z\to\alpha}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

$$=\frac{\displaystyle\lim_{z\to\alpha}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}}{\displaystyle\lim_{z\to\alpha}\frac{g(z)-g(\alpha)}{z-\alpha}}=\lim_{z\to\alpha}\frac{\dfrac{f(z)-\cancel{f(\alpha)}^{\,0}}{\cancel{z-\alpha}}}{\dfrac{g(z)-\cancel{g(\alpha)}^{\,0}}{\cancel{z-\alpha}}}$$

$$=\lim_{z\to\alpha}\frac{f(z)}{g(z)}=((\,*\,)\text{の左辺})\quad\text{となる。}$$

よって，$(\,*\,)$ の公式は成り立つことが示せたんだね。

このロピタルの定理 $(\,*\,)$ の公式を利用すると，$\lim_{z\to\alpha}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{0}{0}$ の不定形

の極限の問題を容易に解くことができる。

では，実際に，次の例題でロピタルの定理を利用してみよう。

例題 2　次の複素関数の極限を求めよう。

(1) $\displaystyle\lim_{z\to 2i}\frac{\sin z-\sin 2i}{z-2i}$　　(2) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{\log(-iz)}{z-i}$

(3) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\cos 2z-1}{z^2}$

(1) $\displaystyle\lim_{z\to 2i}\frac{\sin z-\sin 2i}{z-2i}$ は $\frac{0}{0}$ の不定形で，$\sin z-\sin 2i$，$z-2i$ は共に正則な関数より，(＊) のロピタルの定理を用いると，

$$\lim_{z\to 2i}\frac{\sin z-\sin 2i}{z-2i}=\lim_{z\to 2i}\frac{(\sin z-\sin 2i)'}{(z-2i)'}=\lim_{z\to 2i}\frac{\cos z}{1}$$

$$=\cos 2i=\frac{e^{i\cdot 2i}+e^{-i\cdot 2i}}{2}=\frac{e^2+e^{-2}}{2}=\cosh 2$$ となる。

(2) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{\log(-iz)}{z-i}$ は $\frac{0}{0}$ の不定形で，$\log(-iz)$ は $z=0$ 以外で正則な関数であり，$z-i$ は正則な関数より，(＊) を用いると

$$\lim_{z\to i}\frac{\log(-iz)}{z-i}=\lim_{z\to i}\frac{\{\log(-iz)\}'}{(z-i)'}=\lim_{z\to i}\frac{\frac{-i}{-iz}}{1}=\lim_{z\to i}\frac{1}{z}$$

$$=\frac{1}{i}=-\frac{i^2}{i}=-i$$ となるんだね。大丈夫？

(3) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\cos 2z-1}{z^2}$ は $\frac{0}{0}$ の不定形で，$\cos 2z-1$，z^2 は共に正則な関数より，(＊) を用いると

$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos 2z-1}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{(\cos 2z-1)'}{(z^2)'}=\lim_{z\to 0}\frac{-\cancel{2}\sin 2z}{\cancel{2}z}\left(=\frac{0}{0}\text{の不定形}\right)$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(-\sin 2z)'}{z'}=\lim_{z\to 0}\frac{-2\cos 2z}{1}=-2\times\cos 0=-2$$ となる。

ロピタルの定理の 2 連発！

以上で，$\frac{0}{0}$ の形の複素関数の極限の問題の解法にも慣れたでしょう？