● サンドイッチ型の n 乗の応用計算にもチャレンジしよう！

このサンドイッチ $(P^{-1}AP)$ 型の n 乗計算には，$P^{-1}AP$ が対角行列になるもの以外に，ジョルダン細胞の形になるものもある。2 次のジョルダン細胞とは，$\begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$ $(\gamma \neq 0)$ の形の行列のことなんだね。そして，$P^{-1}AP$ が，この形の行列になるときも，次のように A^n を求めることができる。

$P^{-1}AP$ 型の n 乗計算 (Ⅱ)

$$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}}_{\text{2 次のジョルダン細胞}} \quad (\gamma \neq 0) \quad \cdots\cdots①$$

この形になるように，問題では予め行列 P は与えられる。

①の両辺を n 乗すると，

$$\underbrace{(P^{-1}AP)^n}_{P^{-1}A^nP} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}^n}_{\begin{bmatrix} \gamma^n & n\gamma^{n-1} \\ 0 & \gamma^n \end{bmatrix}} \qquad \therefore\ P^{-1}A^nP = \begin{bmatrix} \gamma^n & n\gamma^{n-1} \\ 0 & \gamma^n \end{bmatrix} \cdots\cdots②$$

この変形は，P186 で既に解説した。

よって，②の両辺に左から P，右から P^{-1} をかけると，

$$\underbrace{PP^{-1}}_{E} A^n \underbrace{PP^{-1}}_{E} = P \begin{bmatrix} \gamma^n & n\gamma^{n-1} \\ 0 & \gamma^n \end{bmatrix} P^{-1} \text{ より，}$$

$$A^n = P \begin{bmatrix} \gamma^n & n\gamma^{n-1} \\ 0 & \gamma^n \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{となって，} A^n \text{ が求まる。}$$

①の左辺の n 乗が，$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ となるのは，P186 で既にそのやり方を解説しているので，大丈夫だね。皆さんの疑問は，①の右辺の n 乗が，何故 $\begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^n & n\gamma^{n-1} \\ 0 & \gamma^n \end{bmatrix}$ と変形できるのか？だろうね。詳しく解説しておこう。

$$\begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}^n = \Bigg\{\underbrace{\gamma\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\gamma} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}\Bigg\}^n = \gamma^n \begin{bmatrix} 1 & \overset{\alpha}{\boxed{\frac{1}{\gamma}}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \gamma^n \begin{bmatrix} 1 & n\cdot\frac{1}{\gamma} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

まず，γ をくくり出す

$\dfrac{1}{\gamma} = \alpha$ とおくと，4 つの A^n 計算の基本パターンの 1 つより，
$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ だね。

これから，①の右辺の n 乗は，

$\begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \gamma^n & n\gamma^{n-1} \\ 0 & \gamma^n \end{bmatrix}$ と変形できるんだね。納得いった？

それでは，このサンドイッチ $(P^{-1}AP)$ 型の A^n 計算の応用についても，次の例題で練習しておこう。

例題 68 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ について，

(ⅰ) $P^{-1}AP$ を求めて，(ⅱ) A^n $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよう。

(ⅰ) まず，P^{-1} を求めると，

$$P^{-1} = \frac{1}{\cancel{1\cdot 0} - (-1)\cdot(-1)}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$= -1\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$ となる。

よって，$P^{-1}AP$ を求めると，

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(\mathrm{a})$$ となる。

これは，$\gamma = 2$ の 2 次のジョルダン細胞になっているんだね。

(ii) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&3\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&-1\end{bmatrix}$ について，

$P^{-1}AP=\underline{\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}}$ ……(a)　となることが分かったので，

これは，2 次のジョルダン細胞 $\begin{bmatrix}\gamma&1\\0&\gamma\end{bmatrix}$ の $\gamma=2$ のときのものだ。

(a)の両辺を n 乗し，変形すると

$$\underbrace{(P^{-1}AP)^n}_{\boxed{P^{-1}A^nP}}=\underbrace{\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}^n}_{\boxed{=\left\{2\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}\right\}^n=2^n\begin{bmatrix}1&\frac{n}{2}\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n&n\cdot2^{n-1}\\0&2^n\end{bmatrix}}}$$

$\begin{bmatrix}\gamma&1\\0&\gamma\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\gamma^n&n\gamma^{n-1}\\0&\gamma^n\end{bmatrix}$ は，公式として覚えておいて使ってもいいけれど，上記のように，$\gamma=2$ をくくり出して n 乗して，その都度導いても構わない。

$$\therefore\ P^{-1}A^nP=\begin{bmatrix}2^n&n\cdot2^{n-1}\\0&2^n\end{bmatrix}\ \text{……(b)}$$ となる。

(b)の両辺に，左から P，右から P^{-1} をかけると，

$$A^n=P\begin{bmatrix}2^n&n\cdot2^{n-1}\\0&2^n\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n&n\cdot2^{n-1}\\0&2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2^n&n\cdot2^{n-1}-2^n\\-2^n&-n\cdot2^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-n\cdot2^{n-1}+2^n&\cancel{-2^n}-n\cdot2^{n-1}+\cancel{2^n}\\n\cdot2^{n-1}&2^n+n\cdot2^{n-1}\end{bmatrix}$$

以上より，A^n は次のようになる。

$$A^n=\begin{bmatrix}2^n-n\cdot2^{n-1}&-n\cdot2^{n-1}\\n\cdot2^{n-1}&2^n+n\cdot2^{n-1}\end{bmatrix}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)\ \text{……(c)}$$

少し複雑な計算だったので，(c)の検算をやっておこう。(c)の n に $n=1$ を代入して，$A^1=A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ となるか？ 否か？ を確認しておくといいんだね。

(c)に $n=1$ を代入すると，

$$A^1=\begin{bmatrix} 2^1-1\cdot 2^0 & -1\cdot 2^0 \\ 1\cdot 2^0 & 2^1+1\cdot 2^0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2-1 & -1 \\ 1 & 2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}(=A)$$

となって，無事 A になるので，この計算もまず間違っていないってことが確認できたんだね。

ここでも，A を $P^{-1}AP$ により，ジョルダン細胞にするための行列 P をどのように求めるのか？ 疑問に思っておられる方も多いと思う。でも，そのためには，より本格的な“**線形代数**”の解説が必要となるため，ここでは，残念だけれど，割愛する以外にない。

しかし，その疑問を持って，大学の線形代数の講義に臨めば，よりスムーズに理解が進み，疑問も氷解することと思う。

つまり，大学数学に進むための基礎が，これで出来たということなんだね。頑張って頂きたい。