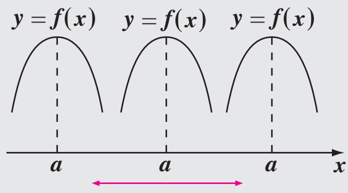
初めからトライ！問題 48　2次関数　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

2 次関数 $y=f(x)=-x^2+2ax+a^2+3$　(a：定数) がある。

(1) $-1 \leqq x \leqq 1$ における，$f(x)$ の最大値 M を求めよ。

(2) $-1 \leqq x \leqq 1$ における，$f(x)$ の最小値 m を求めよ。

ヒント！ 今回は，$y=f(x)$ が上に凸の放物線の場合の，カニ歩き＆場合分けの問題だね。$y=f(x)=-(x-a)^2+2a^2+3$ より，この頂点の x 座標が $x=a$ となるため，$y=f(x)$ は右図に示すように，横にカニ歩きするんだね。よって，$-1 \leqq x \leqq 1$ における，(1) $y=f(x)$ の最大値 M は 3 通りに場合分けして求め，(2) $y=f(x)$ の最小値 m は 2 通りに場合分けして求めればいいんだね。頑張ろう！



解答＆解説

実質，引いている！

(1) $y=f(x)=-x^2+2ax+a^2+3=-(x^2-2ax+a^2)+a^2+3+a^2$

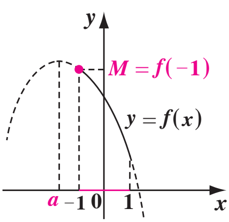
2 で割って 2 乗！　a^2 を引いた分，たす

$$=-(x-a)^2+2a^2+3 \text{ より，}$$

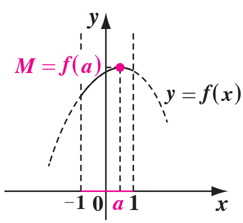
$y=f(x)$ は，頂点 $(a,\ 2a^2+3)$ の上に凸の放物線である。

よって，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $y=f(x)$ の最大値 M は，下図より明らかに (i) $a \leqq -1$，(ii) $-1 < a \leqq 1$，(iii) $1 < a$ の 3 通りに場合分けして求めなければならない。

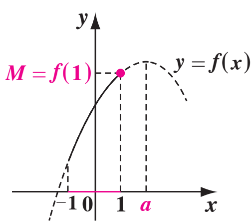
(i) $a \leqq -1$ のとき



(ii) $-1 < a \leqq 1$ のとき



(iii) $1 < a$ のとき

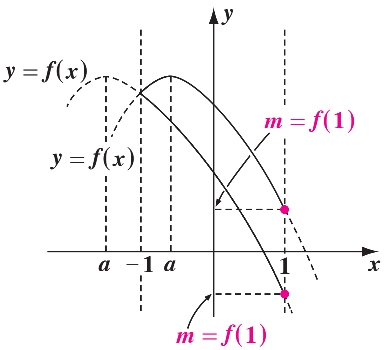


以上より，$y=f(x)$ の最大値 M は，

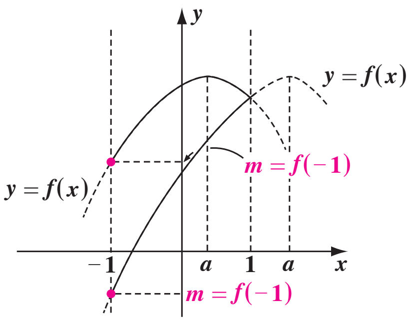
$$
\begin{cases}
\text{(i)}\ a \leqq -1 \text{ のとき,} & M = f(-1) = -(-1)^2 + 2a\cdot(-1) + a^2 + 3 \\
& \quad = a^2 - 2a + 2 \\
\text{(ii)}\ -1 < a \leqq 1 \text{ のとき,} & M = f(a) = -\cancel{(a-a)}^2 + 2a^2 + 3 \\
& \quad = 2a^2 + 3 \\
\text{(iii)}\ 1 < a \text{ のとき,} & M = f(1) = -1^2 + 2a\cdot 1 + a^2 + 3 \\
& \quad = a^2 + 2a + 2 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})
\end{cases}
$$

(2) 次に，$-1 \leqq x \leqq 1$ における最少値 m は，下図より明らかに，(i) $a \leqq 0$，(ii) $0 < a$ の 2 通りに場合分けして求める必要がある。

(i) $a \leqq 0$ のとき



(ii) $0 < a$ のとき



a が，$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲内か否かに関わらず，$-1 \leqq x \leqq 1$ の真ん中の値の $x=0$ より，a が小さいか，大きいかによって，最小値 m の値は場合分けして求められるんだね。

以上より，$y=f(x)$ の最小値 m は，

$$
\begin{cases}
\text{(i)}\ a \leqq 0 \text{ のとき,} & m = f(1) = -1^2 + 2a\cdot 1 + a^2 + 3 \\
& \quad = a^2 + 2a + 2 \\
\text{(ii)}\ 0 < a \text{ のとき,} & m = f(-1) = -(-1)^2 + 2a\cdot(-1) + a^2 + 3 \\
& \quad = a^2 - 2a + 2 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})
\end{cases}
$$