(2) $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{b}{a+c}$ を変形すると,

$$\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}=\frac{c(a+c)+b(a+b)}{(a+b)(a+c)}=\frac{ca+c^2+ab+b^2}{a^2+ca+ab+bc}$$

$$=\frac{b^2+c^2+ab+ca}{a^2+ab+bc+ca} \quad \cdots\cdots①$$

この時点でどうなるのかは分からないけれど,∠A = 60° の条件だけは与えられているので,余弦定理を使うよ。すると,a,b,c の関係式が出てくるので,これが突破口になりそうなんだね。ここは,余弦定理で勝負だな!

ここで,余弦定理より,

$\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

$$a^2=b^2+c^2-\cancel{2}b\cdot c\cdot\cancel{\cos A}$$

これで,①の分子の b^2+c^2 を消せる!

$$a^2=b^2+c^2-bc \qquad \therefore\ b^2+c^2=a^2+bc \quad \cdots\cdots②$$

よって,②を①に代入して,

a^2+bc (②より)

$$\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}=\frac{\boxed{b^2+c^2}+ab+ca}{a^2+ab+bc+ca}$$

$$=\frac{a^2+bc+ab+ca}{a^2+ab+bc+ca} \quad (②より)$$

分子・分母が同じになった! ← やった!!

$$=\frac{a^2+ab+bc+ca}{a^2+ab+bc+ca}$$

$$=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(答)$$

どう?うまく解けて面白かったでしょう?

それでは,今度は,正弦定理と辺の比の関係を利用する問題にもチャレンジしてみよう。

練習問題 34	三角比と図形(Ⅲ)	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

三角形ABCについて $\frac{\sin A}{7}=\frac{\sin B}{5}=\frac{\sin C}{3}$ …①が成り立っていて，さらに，三角形ABCの面積 $S=15\sqrt{3}$ である。このとき次の問いに答えよ。

(1) ∠Aと，3辺の長さBC，CA，ABを求めよ。

(2) 三角形ABCの内接円の半径 r を求めよ。

(1) ①より，$\sin A:\sin B:\sin C=7:5:3$ であり，また，正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$(定数)より，$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$ となる。これから，$a:b:c=7:5:3$ となるんだね。(2) では，内接円の半径 r を，公式：$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$ から求めればいいんだね。

(1) ①より，

$$\frac{\sin A}{7}=\frac{\sin B}{5}=\frac{\sin C}{3}=l\ (定数)$$

とおくと，

$\sin A=7l,\ \sin B=5l,\ \sin C=3l$ より

$$\sin A:\sin B:\sin C=7l:5l:3l$$
$$=7:5:3 \cdots\cdots ②$$ となる。

また，正弦定理より，

$$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c \cdots\cdots ③$$

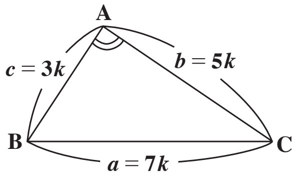
正弦定理
$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$(定数)
より，$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，
$\sin C=\frac{c}{2R}$ となる。よって，
$\sin A:\sin B:\sin C=\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}$
$=a:b:c$ となるんだね。

となる。よって，②，③より，△ABCの3辺の比 $a:b:c$ は，

$$a:b:c=7:5:3 \cdots\cdots ④$$ となる。

よって，正の比例定数 k を用いると④は，

$$\begin{cases} a=BC=7k \\ b=CA=5k \quad \cdots\cdots ⑤ \quad (k:正の定数) \\ c=AB=3k \end{cases}$$



となる。ここで，余弦定理から $\cos A$ を求めると，

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(5k)^2+(3k)^2-(7k)^2}{2\cdot 5k\cdot 3k}$$

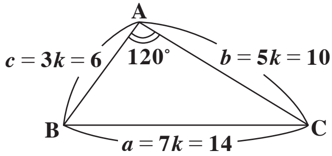
$$\begin{cases} a = 7k \\ b = 5k \cdots\cdots⑤ \\ c = 3k \end{cases}$$

$$= \frac{(25+9-49)\cancel{k^2}}{30\cancel{k^2}}$$

分子・分母の k^2 が消える！

$$= \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$ より，

$\angle A = 120°$ である。



ここで，△ABC の面積 $S = 15\sqrt{3}$ より，

$$S = \frac{1}{2}\underbrace{b}_{5k}\cdot\underbrace{c}_{3k}\cdot\underbrace{\sin A}_{\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}} = 15\sqrt{3}$$ よって，$\frac{1}{2}\cdot 5k\cdot 3k\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$

$\frac{\cancel{15\sqrt{3}}}{4}k^2 = \cancel{15\sqrt{3}}^{\,1}$　$k^2=4$　$\therefore k=2$……⑥　（$\because k$：正の定数）

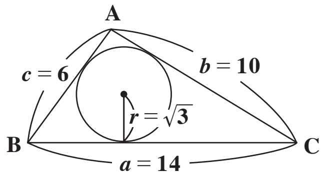
⑥を⑤に代入すると，

$a=BC=7\times 2=14$，$b=CA=5\times 2=10$，$c=AB=3\times 2=6$ となって，

3 辺の長さがすべて求まるんだね。

(2) △ABC の内接円の半径を r とおくと

公式：$\underbrace{S}_{15\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\underbrace{(a+b+c)}_{14+10+6}\cdot r$ より，



$15\sqrt{3} = \frac{1}{2}\times 30\times r$　$\cancel{15}\sqrt{3} = \cancel{15}r$

$\therefore r=\sqrt{3}$ となるんだね。大丈夫だった？

結構レベルの高い問題ばかりだったんだけれど，テストではよく出題される内容ばかりなので，何回でも自分で納得がいくまで解いて，是非マスターしよう！