補充問題 4　難易度 ★★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

a, b, c を正の実数で, $abc=1$ を満たすものとする。このとき, 次の (1), (2) の $(*1)$ と $(*2)$ の不等式が成り立つことを示せ。

(1) $a^2+b^2+c^2 \geqq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ ……$(*1)$

(2) $a+b+c \geqq 3$ ……………………………$(*2)$　(東北大*)

レクチャー 2 項の相加・相乗平均の不等式, $\dfrac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$ $(x>0,\ y>0,$ 等号成立条件 : $x=y)$ については, 大丈夫だね。今回は 3 項の相加・相乗平均率の不等式 : $\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$ ……$(*)$, すなわち $x+y+z \geqq 3\sqrt[3]{xyz}$ ……$(*)'$ $(x>0,\ y>0,\ z>0,$ 等号成立条件 : $x=y=z)$ と関連した問題だね。

$(*)'$ の証明は, 3 次式の因数分解の公式 :

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ ……㋐ を用いるので, 少し数学 II の範囲に入るが, 頻出パターンの問題なので頭に入れておこう。

$a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき, ㋐ より,

この変形がポイントだね。

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}\underbrace{(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)}_{=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{(a+b+c)}_{\oplus}\{\underbrace{(a-b)^2}_{0\text{以上}}+\underbrace{(b-c)^2}_{0\text{以上}}+\underbrace{(c-a)^2}_{0\text{以上}}\} \geqq 0$$

等号が成立するのは, $a-b=b-c=c-a=0$ すなわち $a=b=c$ のときだね。

よって, $a^3+b^3+c^3-3abc \geqq 0$ より,

$a^3+b^3+c^3 \geqq 3abc$ ……㋑ $(a>0,\ b>0,\ c>0,$ 等号成立条件 : $a=b=c)$ となる。

ここで, $a^3=x$, $b^3=y$, $c^3=z$ とおくと, $a=\sqrt[3]{x}$, $b=\sqrt[3]{y}$, $c=\sqrt[3]{z}$ となるので ㋑ より公式 $x+y+z \geqq 3\underbrace{\sqrt[3]{xyz}}_{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[3]{z}}$ ……$(*)'$ $(x>0,\ y>0,\ z>0,$ 等号成立条件 : $x=y=z)$ が導ける。

よって, この 3 項の相加・相乗平均の不等式 $(*)'$ を用いれば, $(*2)$ は, $a>0,\ b>0,\ c>0,\ abc=1$ より, $a+b+c \geqq 3\sqrt[3]{\underbrace{abc}_{1}}=3$ となって, 簡単に導ける。

しかし, 今回は, あくまでも数学 I・A の問題なので, (1) の $(*1)$ を利用して導こう!

(1) $a>0,\ b>0,\ c>0$ かつ，$abc=1$ のとき，

$$a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \cdots\cdots(*1)$$

が成り立つことを示す。

$(*1)$ の右辺を変形して，

$$((*1)\text{ の右辺}) = \frac{bc+ca+ab}{\underbrace{\boxed{abc}}_{1}}$$

$$= ab+bc+ca$$

となるので，$(*1)$ の代わりに，

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca \cdots\cdots(*1)'$$

が成り立つことを示せばよい。

$((*1)'\text{ の左辺}) - ((*1)'\text{ の右辺})$

$$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

この変形がポイント！

$$= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\underbrace{(a-b)^2}_{0\text{ 以上}}+\underbrace{(b-c)^2}_{0\text{ 以上}}+\underbrace{(c-a)^2}_{0\text{ 以上}}\} \geqq 0$$

$(\because (a-b)^2 \geqq 0,\ (b-c)^2 \geqq 0,\ (c-a)^2 \geqq 0)$

(また，等号が成り立つのは，$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$ すなわち，$a=b=c$ のときである。) 以上より，

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ abc=1$ のとき，

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca \cdots\cdots(*1)'$$

(等号成立条件：$a=b=c$) が成り立つ。

よって，$(*1)$ も成り立つ。……(終)

(2) $a>0,\ b>0,\ c>0,\ abc=1$ のとき，

$a+b+c \geqq 3 \cdots\cdots(*2)$ が成り立つことを示す。

ここで，$x>0,\ y>0,\ z>0,\ xyz=1$ とおくと $(*1)'$ より，

$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx \cdots\cdots$ ①が成り立つ。①の両辺に $(x+y+z)(>0)$ をかけると，次式が成り立つ。

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$$

$$\geqq (x+y+z)(xy+yz+zx) \cdots\cdots ②$$

$$(②\text{の左辺}) = x^3+xy^2+z^2x+x^2y+y^3+yz^2+zx^2+y^2z+z^3$$

$$= x^3+y^3+z^3+(y+z)x^2+(y^2+z^2)x+yz(y+z) \cdots\cdots ③$$

$$(②\text{の右辺}) = x^2y+\underbrace{xyz}_{1}+zx^2+xy^2+y^2z+\underbrace{xyz}_{1}+\underbrace{xyz}_{1}+yz^2+z^2x$$

$$= 3+(y+z)x^2+(y^2+z^2)x+yz(y+z) \cdots\cdots ④$$

③，④を②に代入すると，

$$x^3+y^3+z^3+\cancel{(y+z)x^2}+\cancel{(y^2+z^2)x}+\cancel{yz(y+z)}$$

$$\geqq 3+\cancel{(y+z)x^2}+\cancel{(y^2+z^2)x}+\cancel{yz(y+z)}$$

$x^3+y^3+z^3 \geqq 3$ となる。

ここで，$x^3=a,\ y^3=b,\ z^3=c$ とおくと，

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ abc=(\underbrace{xyz}_{1})^3=1^3=1$

となる。よって，

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ abc=1$ のとき，

$a+b+c \geqq 3 \cdots\cdots(*2)$ は成り立つ。

…………(終)