曲線の長さ (Ⅱ)

絶対暗記問題 67	難易度 ★★	CHECK1	CHECK2	CHECK3

曲線 $C \begin{cases} x = e^{-\frac{\theta}{2}}\cos\theta \\ y = e^{-\frac{\theta}{2}}\sin\theta \end{cases}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の長さ L を求めよ。

ヒント！ 曲線 C は，**P49** で解説したらせんの変形ヴァージョンだね。媒介変数表示された曲線の長さの公式：$L = \int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ を利用して解いていこう。

媒介変数は θ でも t でもなんでも構わないんだね。

解答＆解説

曲線 $C \begin{cases} x = e^{-\frac{\theta}{2}}\cos\theta \\ y = e^{-\frac{\theta}{2}}\sin\theta \end{cases}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の長さを求めるために，まず，$\frac{dx}{d\theta}$ と $\frac{dy}{d\theta}$ を求め，$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$ を求めると，

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

$$\cdot\ \frac{dx}{d\theta} = \left(e^{-\frac{\theta}{2}}\cos\theta\right)' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{\theta}{2}}\cos\theta - e^{-\frac{\theta}{2}}\sin\theta = -e^{-\frac{\theta}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\sin\theta\right) \cdots\cdots ①$$

$$\cdot\ \frac{dy}{d\theta} = \left(e^{-\frac{\theta}{2}}\sin\theta\right)' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{\theta}{2}}\sin\theta + e^{-\frac{\theta}{2}}\cos\theta = -e^{-\frac{\theta}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\cos\theta\right) \cdots\cdots ②$$

①，②より，

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \underbrace{e^{-\theta}}_{\left(-e^{-\frac{\theta}{2}}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\sin\theta\right)^2 + \underbrace{e^{-\theta}}_{\left(-e^{-\frac{\theta}{2}}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\cos\theta\right)^2$$

$$= e^{-\theta}\underbrace{\left(\frac{1}{4}\cos^2\theta \cancel{+\sin\theta\cos\theta} + \sin^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta \cancel{-\sin\theta\cos\theta} + \cos^2\theta\right)}_{\frac{1}{4}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = \frac{1}{4}\times 1 + 1 = \frac{5}{4}}$$

$$= \frac{5}{4}e^{-\theta} \cdots\cdots ③ \text{ となる。}$$

以上より，求める曲線 C の長さ L は，③を用いて，

$$L = \int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{\pi}\sqrt{\frac{5}{4}e^{-\theta}}\,d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^{\pi}e^{-\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot(-2)\left[e^{-\frac{\theta}{2}}\right]_0^{\pi} = -\sqrt{5}\left(e^{-\frac{\pi}{2}} - \underbrace{e^0}_{1}\right) = \sqrt{5}\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

位置と道のり

絶対暗記問題 68　難易度 ★★　CHECK1　CHECK2　CHECK3

x 軸上を運動する動点 P(x) の位置 x が $x=\sqrt{3}\sin t+\cos t$ ……①
(t : 時刻, $t \geqq 0$) で与えられる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 動点 P の速度 v を求めよ。

(2) 動点 P が，$0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で動いた道のり L を求めよ。

ヒント！ (1) 動点 P の速度 v は，$v=\dfrac{dx}{dt}$ で求めるんだね。(2) $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で動点 P の動いた道のり L は，公式：$L=\displaystyle\int_0^{\pi}|v|\,dt$ で求めればいい。

解答＆解説

(1) 動点 P の速度 v は，①を t で微分して，

$$v=\frac{dx}{dt}=\left(\sqrt{3}\sin t+\cos t\right)'=\sqrt{3}\cos t-\sin t$$ ……② となる。 ………(答)

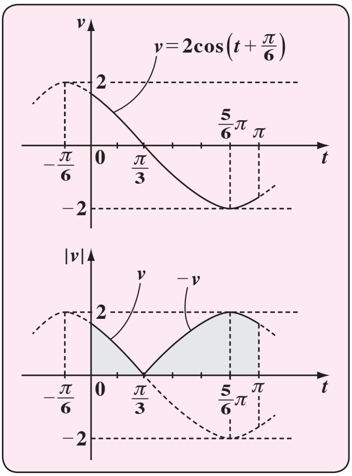
(2) ②に三角関数の合成を用いると，

$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

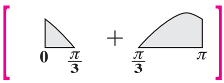
$$v=\underbrace{2}_{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{6}}\cos t-\underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\frac{\pi}{6}}\sin t\right)=2\left(\cos t\cos\frac{\pi}{6}-\sin t\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore\ v=2\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\ \cdots\cdots ②'\quad (t \geqq 0)$$

となる。v と $|v|$ の右のグラフから，動点 P が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で動いた道のり L は，



$$L=\int_0^{\pi}|v|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}v\,dt-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}v\,dt$$



$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)dt-2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)dt$$

$$=2\left[\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-2\left[\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=2\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}}-2\underbrace{\left(-\frac{1}{2}-1\right)}_{\sin\frac{7}{6}\pi-\sin\frac{\pi}{2}}$$

$=1+3=4$ である。 ………………………………………………(答)