面積と回転体の体積

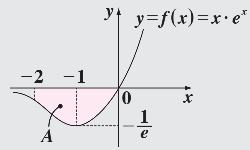
絶対暗記問題 63	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

曲線 $y = x \cdot e^x$ と，x 軸と直線 $x = -2$ とで囲まれる図形を A とおく。

(1) A の面積 S を求めよ。

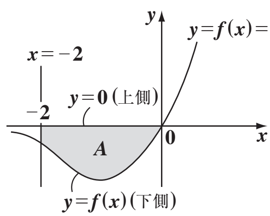
(2) A を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ。

ヒント！ 曲線 $y = f(x) = x \cdot e^x$ とおくと，このグラフの概形については，**P138**で既に解説したように右図のようになり，図形 A は右図の網目部で示した部分になるんだね。



解答＆解説

曲線 $y = f(x) = x \cdot e^x$ とおくと，この曲線のグラフの概形は，右図のようになる。$y = f(x)$ と x 軸と $x = -2$ とで囲まれた図形 A を網目部で示す。



$f'(x) = (x+1) \cdot e^x = 0$ より，

$x = -1 \qquad f(-1) = -\frac{1}{e}$

増減表

x		-1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

(1) $-2 \leqq x \leqq 0$ のとき，$f(x) \leqq 0$

よって，求める図形 A の面積 S は，

$$S = -\int_{-2}^{0} f(x)dx$$

$\underbrace{0}_{上側} - \underbrace{f(x)}_{下側}$ の積分だね。

$$= -\int_{-2}^{0} x \cdot e^x dx$$

$$= -\int_{-2}^{0} x \cdot (e^x)' dx$$

$$= -\left[x \cdot e^x\right]_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} 1 \cdot e^x dx$$

部分積分

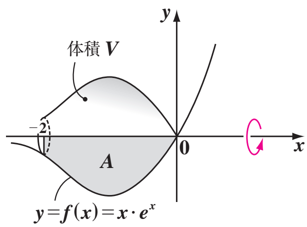
$$\int_{-2}^{0} f \cdot g' dx = [f \cdot g]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} f' \cdot g dx$$

$$= -\{\cancel{0 \cdot e^0} - (-2) \cdot e^{-2}\} + \left[e^x\right]_{-2}^{0}$$

$$= -2e^{-2} + \underbrace{e^0}_{1} - e^{-2}$$

$\therefore S = 1 - 3 \cdot e^{-2} = 1 - \frac{3}{e^2}$ となる。 ……………………………………(答)

(2) 次に，図形 A を，右図のように，
x 軸のまわりに回転してできる
回転体の体積 V を求めると，



$$V=\pi\int_{-2}^{0}\{f(x)\}^2dx$$

x 軸のまわりの回転体の積分計算では，
$\{f(x)\}^2$ を積分するので，$f(x)\leqq 0$ でも気にせず，
そのまま積分すればいいんだね。

$$=\pi\int_{-2}^{0}(x\cdot e^x)^2dx=\pi\int_{-2}^{0}x^2\cdot e^{2x}dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{0}x^2\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{2}\left[x^2e^{2x}\right]_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}\cancel{2}x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}e^{2x}dx\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{2}(\cancel{0}-4e^{-4})-\int_{-2}^{0}x\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx\right\}$$

$$=\pi\left\{-2e^{-4}-\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_{-2}^{0}+\int_{-2}^{0}1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx\right\}$$

$$=\pi\left\{-2\cdot e^{-4}-\frac{1}{2}(\cancel{0}+2e^{-4})+\frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_{-2}^{0}\right\}$$

$$=\pi\left\{-3\cdot e^{-4}+\frac{1}{4}(\underbrace{e^0}_{1}-e^{-4})\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{4}\underbrace{-\frac{3}{e^4}-\frac{1}{4e^4}}_{-\frac{12+1}{4e^4}=-\frac{13}{4e^4}}\right)=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{13}{e^4}\right)$$

となる。……………………………(答)

部分積分

$$\int_{-2}^{0}f\cdot g'dx=[f\cdot g]_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}f'\cdot g\,dx$$

の 2 連発だね。

面積と極限の問題

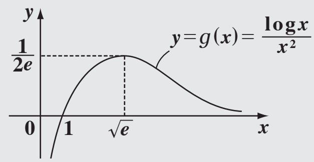
絶対暗記問題 64	難易度 ★★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

曲線 $y = \dfrac{\log x}{x^2}$ と，x 軸と直線 $x = e^n$ とで囲まれる図形の面積を S_n とおく。ただし，n は自然数とする。

(1) $S_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

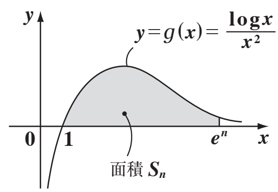
(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

ヒント！ 曲線 $y = g(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ とおくと，このグラフの概形については，P139および絶対暗記問題 45(P142)で既に解説したように，右図のようになるんだね。



解答＆解説

曲線 $y = g(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ とおくと，この曲線のグラフの概形は，右図のようになる。ここで，$y = g(x)$ と x 軸と直線 $x = e^n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とで囲まれる図形を網目部で示す。



$g'(x) = \dfrac{1 - 2\log x}{x^3} = 0$ より，

$x = \sqrt{e}$　　$f(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2e}$

増減表

x		$\sqrt{e}$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘

$\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x) = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

(1) この図形の面積 $S_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めると，

$$S_n = \int_1^{e^n} g(x)dx$$

$$= \int_1^{e^n} \frac{\log x}{x^2} dx \quad \cdots\cdots①$$

この形では積分が難しいので $\log x = t$ と置換してみよう。

ここで，$\log x = t$ とおく。

よって，$x = e^t$ だね。

$x : 1 \longrightarrow e^n$ のとき，

$t : \underbrace{0}_{\log 1} \longrightarrow \underbrace{n}_{\log e^n = n \cdot \underbrace{\log e}_{1} = n}$ となる。

また，$\underbrace{\frac{1}{x}}_{(\log x)'}\cdot dx=\underbrace{1}_{t'}\cdot dt$ より，$\frac{1}{x}dx=dt$

以上より，①の積分は，

$$S_n=\int_1^{e^n}\frac{\overbrace{\log x}^{t}}{\underbrace{x}_{e^t}}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{dt}=\int_0^n\frac{t}{e^t}dt$$

$$=\int_0^n t\cdot e^{-t}dt=\int_0^n t\cdot(-e^{-t})'dt$$

部分積分
$\int_0^n f\cdot g'dt=[f\cdot g]_0^n-\int_0^n f'\cdot g\,dt$

$$=-\left[te^{-t}\right]_0^n-\int_0^n 1\cdot(-e^{-t})dt$$

$$=-(ne^{-n}-\cancel{0\cdot e^0})+\left[-e^{-t}\right]_0^n$$

$$=-ne^{-n}-(e^{-n}-\underbrace{e^0}_{1})=-ne^{-n}-e^{-n}+1$$

$\therefore\ S_n=1-(n+1)e^{-n}$ ……② $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ となる。…………………(答)

積分区間が，$1\leqq x\leqq e^n$ だったため，この図形の面積は定数ではなく，自然数 n の式で表されることになるんだね。

(2) (1)の結果の②より，$n\to\infty$ のときの S_n の極限を調べる。

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\{1-(n+1)\cdot e^{-n}\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\underbrace{\boxed{\frac{n+1}{e^n}}}_{0}\right)$$

$$=1-0$$

$n\to\infty$ のとき，$\frac{n+1}{e^n}$ は，$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形だけれど，$\frac{n+1}{e^n}\left(=\frac{\text{中位の}\infty}{\text{強い}\infty}\right)\to 0$ となるんだね。

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=1$ (収束) となる。………………………………………(答)