面積公式の応用(Ⅱ)

絶対暗記問題 85 難易度 ★★★ CHECK1 CHECK2 CHECK3

2つの放物線 $C_1 : y = -x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 6x - 15$ の共通接線を l とする。l の方程式を求め，C_1，C_2 および l によって囲まれた図形の面積を求めよ。

(名城大＊)

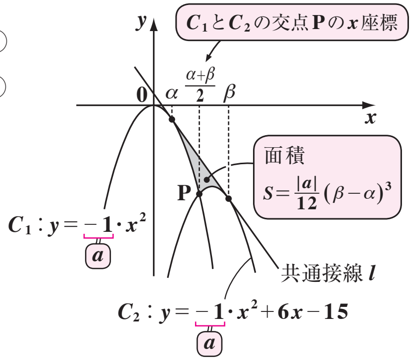
ヒント！ まず，C_1 上の点 $(\alpha, -\alpha^2)$ における接線の式を求め，それが C_2 とも接する条件から，共通接線 l の方程式が求まるね。C_1 と C_2 と l とで囲まれる図形の面積は，面積公式を利用すれば，アッサリ求めることができる。頑張ろう！

解答＆解説

放物線 $C_1 : y = f(x) = -x^2$ ……………①

放物線 $C_2 : y = g(x) = -x^2 + 6x - 15$ ……②

とおく。



$C_2 : y = -(x^2 - 6x + 9) - 15 + 9$
2で割って2乗
$= -(x-3)^2 - 6$ より，これは，頂点 $(3, -6)$ の，上に凸の放物線だね。

①を微分して，$f'(x) = -2x$ より，

$y = f(x)$ 上の点 $(\alpha, \underbrace{-\alpha^2}_{f(\alpha)})$ における接線 l の方程式は，

$y = -2\alpha(x - \alpha) - \alpha^2$ より，$y = -2\alpha x + \alpha^2$ ……③ となる。

[$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$]

接線 l は②の接線でもあるので，②と③から y を消去すると，

$-x^2 + 6x - 15 = -2\alpha x + \alpha^2$

よって，$\underbrace{1}_{a} \cdot x^2 \underbrace{-2(\alpha+3)}_{2b'}x + \underbrace{\alpha^2 + 15}_{c} = 0$ ……④ となる。

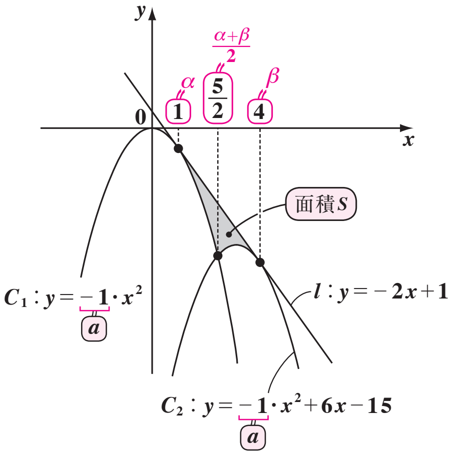
この④の2次方程式は，重解 β をもつ。よって，④の判別式を D とおくと，

$\frac{D}{4} = (\alpha + 3)^2 - 1 \cdot (\alpha^2 + 15) = \cancel{\alpha^2} + 6\alpha + 9 - \cancel{\alpha^2} - 15 = \boxed{6\alpha - 6 = 0}$ となる。

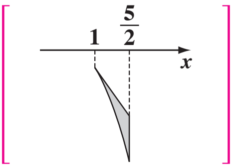
$\therefore\ 6\alpha-6=0$ より，$\alpha=1$　これを③に代入すると，共通接線 l の方程式が，
$y=-2x+1$ と求まる。 ……………………………………………………(答)

また，$\alpha=1$ を，2 次方程式：$x^2-2(\alpha+3)x+\alpha^2+15=0$ ……④ に
代入すると，$x^2-2\cdot(1+3)x+1^2+15=0$ より
$x^2-8x+16=0$　　$(x-4)^2=0$　　$\therefore$ 重解 $x=4\,(=\beta)$ をもつ。

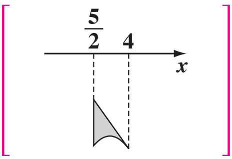
以上より，C_1 と C_2 と l とで囲まれる図形の面積を S とおくと，



$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}\{-2x+1-(-x^2)\}dx$$



$$+\int_{\frac{5}{2}}^{4}\{-2x+1-(-x^2+6x-15)\}dx$$



$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}(x-4)^2dx$$

$$=\frac{9}{4}$$ ………………………………(答)

$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$ ← 面積公式
$=\frac{|-1|}{12}(4-1)^3=\frac{3^3}{12}=\frac{9}{4}$ となる。

頻出問題にトライ・24	難易度 ★★★	CHECK1	CHECK2	CHECK3

放物線 $y=x^2$ がある。点 P からこの放物線に引いた 2 接線とこの放物線とで囲まれる図形の面積が常に 18 であるとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ。

解答は P236

面積公式の応用（Ⅲ）

絶対暗記問題 86	難易度 ★★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

3 次関数 $y=f(x)=x^3+ax^2+bx$ は，$x=3$ のとき，極小値 0 をとる。このとき，次の問いに答えよ。

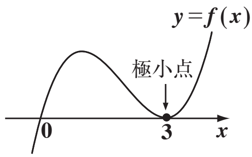
(1) 定数 a，b の値を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の極小点 $A(3,\ 0)$ を通る，x 軸以外の接線を l とおく。l の方程式を求めよ。

(3) 接線 l と曲線 $y=f(x)$ とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

ヒント！ (1) $f'(3)=0$，$f(3)=0$ から，a，b の値を求めよう。(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(p,\ f(p))$ における接線が，点 $A(3,\ 0)$ を通るように，3 以外の p の値を求めよう。(3) では，3 次関数とその接線 l とで囲まれる図形の面積を，面積公式を使って求めるといい。

解答＆解説



(1) $y=f(x)=x^3+ax^2+bx$ ………① とおく。

①を x で微分して，

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ …………②

3 次関数 $y=f(x)$ は $x=3$ で極小値 0 をとるので，

$$\begin{cases} f(3)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases}$$

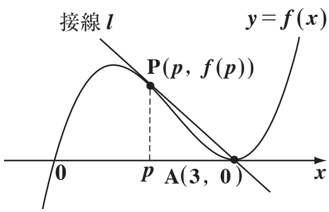
$f(3)=27+9a+3b=0$ ……③

$f'(3)=27+6a+b=0$ ……④

$3\times$④$-$③より，$54+9a=0$　$9a=-54$　$\therefore\ a=-6$ ……⑤

⑤を④に代入して，$27-36+b=0$　$\therefore\ b=9$ ………⑥　………(答)

(2) ⑤，⑥より，$f(x)$ と $f'(x)$ は，



$f(x)=x^3-6x^2+9x$ ……①′

$f'(x)=3x^2-12x+9$ ……②′ となる。

ここで，$y=f(x)$ 上の点 $P(p,\ f(p))$ $(p\neq 3)$ における接線の方程式は，

$y=f'(p)(x-p)+f(p)$ ……⑦ となる。

これが極小点 $A(3,\ 0)$ を通るとき，

［x 軸は，点 A における接線になるが，今回は x 軸以外で，点 A を通る接線を求める。］

$0=\underbrace{f'(p)}_{(3p^2-12p+9)}(3-p)+\underbrace{f(p)}_{p^3-6p^2+9p}$

$$0=\underbrace{(3p^2-12p+9)(3-p)}_{9p^2-3p^3-36p+12p^2+27-\cancel{9p}}+p^3-6p^2+\cancel{9p}$$

$$-2p^3+15p^2-36p+27=0$$

$$2p^3-15p^2+36p-27=0$$

$$(p-3)^2(2p-3)=0$$

ここで，$p\neq 3$ より，$p=\dfrac{3}{2}$

組立て除法

3)	2,	-15,	36,	-27
		6	-27	27
	2	-9	9	(0)
3)		6	-9	
	2	-3	(0)	

$p=3$ における接線も点 A を通る接線なので，$p=3$ は予め重解となることが分かっているんだね。

$$f'\left(\frac{3}{2}\right)=3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-12\cdot\frac{3}{2}+9=\frac{27}{4}-18+9=\frac{27-36}{4}=-\frac{9}{4}$$

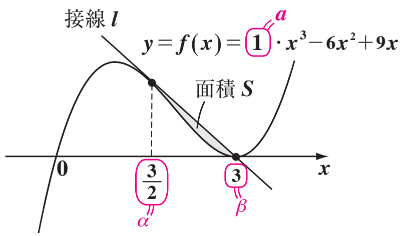
$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+9\cdot\frac{3}{2}=\frac{27}{8}-\frac{\cancel{54}}{\cancel{4}}+\frac{\cancel{27}}{\cancel{2}}=\frac{27}{8}$$

∴求める接線 l の方程式は，

$$y=-\frac{9}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{27}{8}\ \text{より，}\ y=-\frac{9}{4}x+\frac{27}{4}\ \cdots\cdots⑧\ \text{である。}\cdots\cdots(\text{答})$$

$$\left[y=f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

(3) よって，曲線 $y=f(x)$ と接線 l とで囲まれる図形の面積 S は，



$$S=\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left\{-\frac{9}{4}x+\frac{27}{4}-\underbrace{f(x)}_{(x^3-6x^2+9x)}\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(-x^3+6x^2-\frac{45}{4}x+\frac{27}{4}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-\frac{45}{8}x^2+\frac{27}{4}x\right]_{\frac{3}{2}}^{3}$$

$$=\frac{27}{64}\ \text{である。}\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

面積公式

$$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4=\frac{1}{12}\left(3-\frac{3}{2}\right)^4=\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$=\frac{3^3}{4\times 2^4}=\frac{27}{64}$$

頻出問題にトライ・24　難易度 ★★★　CHECK1　CHECK2　CHECK3

放物線 $y=x^2$ がある。点 P からこの放物線に引いた 2 接線とこの放物線とで囲まれる図形の面積が常に 18 であるとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ。

解答は P238