面積公式の応用(Ⅱ)

絶対暗記問題 85	難易度 ★★★	CHECK1	CHECK2	CHECK3

2つの放物線 $C_1: y=-x^2$ と $C_2: y=-x^2+6x-15$ の共通接線を l とする。l の方程式を求め，C_1，C_2 および l によって囲まれた図形の面積を求めよ。

(名城大＊)

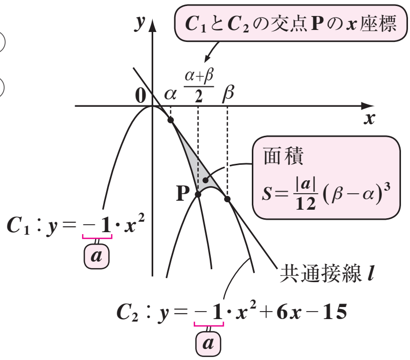
ヒント！ まず，C_1 上の点 $(\alpha, -\alpha^2)$ における接線の式を求め，それが C_2 とも接する条件から，共通接線 l の方程式が求まるね。C_1 と C_2 と l とで囲まれる図形の面積は，面積公式を利用すれば，アッサリ求めることができる。頑張ろう！

解答＆解説

放物線 $C_1: y=f(x)=-x^2$ ……………①

放物線 $C_2: y=g(x)=-x^2+6x-15$ ……②

とおく。



$C_2: y=-(x^2-6x+9)-15+9$ (2で割って2乗)

$=-(x-3)^2-6$ より，これは，頂点 $(3, -6)$ の，上に凸の放物線だね。

①を微分して，$f'(x)=-2x$ より，

$y=f(x)$ 上の点 $(\alpha, \underbrace{-\alpha^2}_{f(\alpha)})$ における接線 l の方程式は，

$y=-2\alpha(x-\alpha)-\alpha^2$ より，$y=-2\alpha x+\alpha^2$ ……③ となる。

[$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$]

接線 l は②の接線でもあるので，②と③から y を消去すると，

$-x^2+6x-15=-2\alpha x+\alpha^2$

よって，$\underbrace{1}_{a}\cdot x^2\underbrace{-2(\alpha+3)}_{2b'}x+\underbrace{\alpha^2+15}_{c}=0$ ……④ となる。

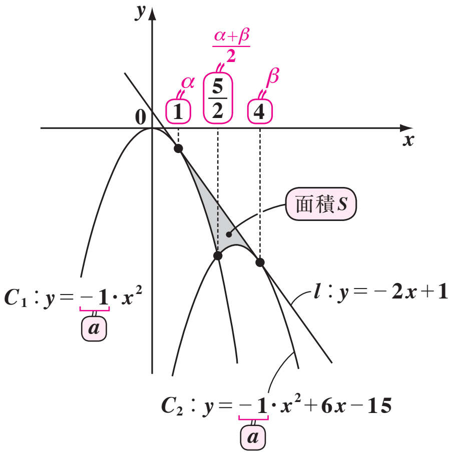
この④の2次方程式は，重解 β をもつ。よって，④の判別式を D とおくと，

$\frac{D}{4}=(\alpha+3)^2-1\cdot(\alpha^2+15)=\cancel{\alpha^2}+6\alpha+9-\cancel{\alpha^2}-15=\boxed{6\alpha-6=0}$ となる。

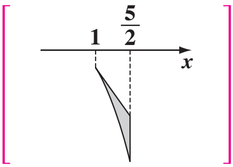
$\therefore\ 6\alpha-6=0$ より，$\alpha=1$　これを③に代入すると，共通接線 l の方程式が，
$y=-2x+1$ と求まる。 ……………………………………………………(答)

また，$\alpha=1$ を，2 次方程式：$x^2-2(\alpha+3)x+\alpha^2+15=0$ ……④ に
代入すると，$x^2-2\cdot(1+3)x+1^2+15=0$ より
$x^2-8x+16=0$　　$(x-4)^2=0$　　$\therefore$ 重解 $x=4\,(=\beta)$ をもつ。

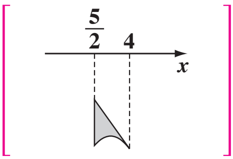
以上より，C_1 と C_2 と l とで囲まれる図形の面積を S とおくと，



$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}\{-2x+1-(-x^2)\}dx$$



$$+\int_{\frac{5}{2}}^{4}\{-2x+1-(-x^2+6x-15)\}dx$$



$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}(x-4)^2dx$$

$$=\frac{9}{4}$$ ………………………………(答)

$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$ ← 面積公式
$=\frac{|-1|}{12}(4-1)^3=\frac{3^3}{12}=\frac{9}{4}$ となる。

頻出問題にトライ・24　難易度 ★★★　CHECK1　CHECK2　CHECK3

放物線 $y=x^2$ がある。点 $\mathbf{P}$ からこの放物線に引いた 2 接線とこの放物線とで囲まれる図形の面積が常に 18 であるとき，点 $\mathbf{P}$ の軌跡の方程式を求めよ。

解答は P236