● 面積公式の応用にもチャレンジしよう！

積分しなくても，曲線と直線で囲まれる図形の面積を求める，便利で役に立つ面積公式をもう 2 つ紹介しておこう。

面積公式の応用

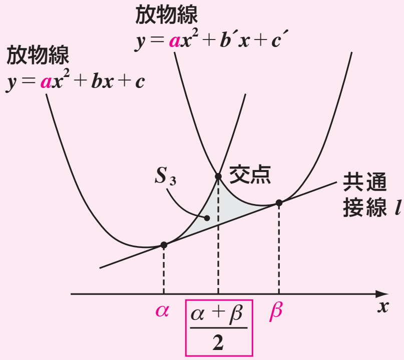
(Ⅲ) 2 つの放物線と共通接線とで囲まれる部分の面積 S_3

2 つの放物線

$$\begin{cases} y = \underline{\underline{a}}x^2 + bx + c \text{ と} \\ y = \underline{\underline{a}}x^2 + b'x + c' \text{ と，} \end{cases}$$

x^2 の係数 $\underline{\underline{a}}$ は同じでなければならない

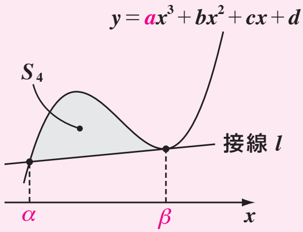
その共通接線 l とで囲まれる部分の面積 S_3 は，それぞれの放物線の接点の x 座標 $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ と，x^2 の係数 a の 3 つだけで，次のように簡単に計算できる。



$$\text{面積 } S_3 = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3$$

(Ⅳ) 3 次関数と接線とで囲まれる部分の面積 S_4

3 次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とその接線 l とで囲まれる部分の面積 S_4 は，3 次関数と接線の交点と接点の x 座標 $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ と，x^2 の係数 a の 3 つだけで，次のように簡単に計算できる。



$$\text{面積 } S_4 = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^4$$

3 次関数と接線の面積公式も，受験では狙われる可能性があるので，シッカリ頭に入れておこう。

では，(Ⅲ)の面積公式を利用する例題にチャレンジしてみよう。

◆例題21◆

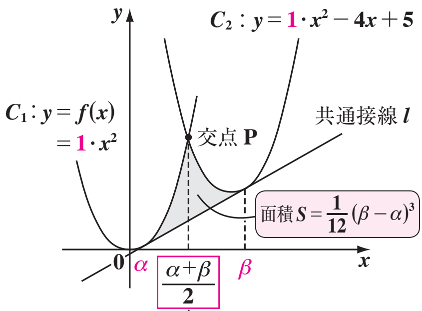
2つの放物線 $C_1: y=x^2$ と $C_2: y=x^2-4x+5$ の両方に接する共通接線 l がある。
(1) C_1 と l の接点の x 座標 α，および C_2 と l の接点の x 座標 β を求めよ。
(2) C_1 と C_2 と l とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。

解答＆解説

(1) $\begin{cases} \text{放物線 } C_1: y=f(x)=x^2 & \cdots\cdots① \\ \text{放物線 } C_2: y=x^2-4x+5 & \cdots② \end{cases}$

とおく。

$C_2: y=(x^2-4x+4)+5-4$ 　2で割って2乗
$=(x-2)^2+1$ より，これは，頂点 $(2,1)$ の下に凸の放物線



C_1 と C_2 の交点Pの座標は，こう表せるのも覚えておこう

①を微分して $f'(x)=2x$

よって，$y=f(x)$ 上の点 $(\alpha, \underbrace{\alpha^2}_{f(\alpha)})$

における接線 l の方程式は，

$y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2$ より，　$y=2\alpha x-\alpha^2$ ………………………③

$[y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)]$

接線 l は，②の接線でもあるので，②と③から y を消去すると，

$x^2-4x+5=2\alpha x-\alpha^2$ 　よって，$\underbrace{1}_{a}\cdot x^2\underbrace{-2(\alpha+2)}_{2b'}x+\underbrace{\alpha^2+5}_{c}=0$ ……④

この2次方程式④は，重解 $(x=\beta)$ をもつ。

よって④の判別式を D とおくと，

$\frac{D}{4}=b'^2-ac$

$\frac{D}{4}=\{-(\alpha+2)\}^2-1\cdot(\alpha^2+5)=(\alpha+2)^2-\alpha^2-5$

$=\cancel{\alpha^2}+4\alpha+4-\cancel{\alpha^2}-5=4\alpha-1=0$ 　$\therefore \alpha=\frac{1}{4}$ となる。…………(答)

$\alpha = \dfrac{1}{4}$ を，$x^2 - 2(\alpha + 2)x + \alpha^2 + 5 = 0$ ……④に代入すると，

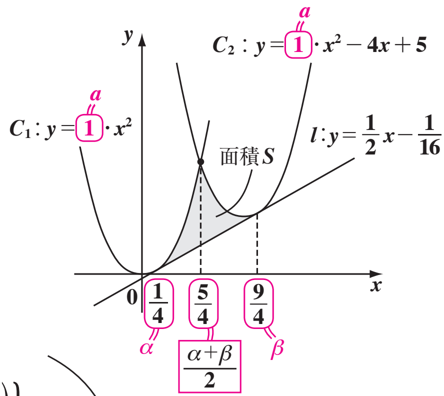
$$x^2 - \underbrace{2\left(\frac{1}{4} + 2\right)}_{-2\cdot\frac{9}{4} = -\frac{9}{2}}x + \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5}_{\frac{1}{16}+5 = \frac{1+80}{16} = \frac{81}{16} = \left(\frac{9}{4}\right)^2} = 0 \qquad x^2 - \frac{9}{2}x + \left(\frac{9}{4}\right)^2 = 0$$

$\left(x - \dfrac{9}{4}\right)^2 = 0$　より，重解 $x = \beta = \dfrac{9}{4}$ である。 ……………………………(答)

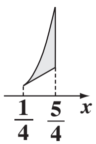
(2) $\alpha = \dfrac{1}{4}$ を，$l : y = 2\alpha x - \alpha^2$ ……③に代入すると，

共通接線 $l : y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{16}$

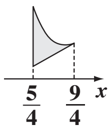
よって，求める C_1 と C_2 と l とで囲まれる部分の面積 S は，



$$S = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} \left\{x^2 - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}\right)\right\}dx$$



$$+ \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{9}{4}} \left\{x^2 - 4x + 5 - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}\right)\right\}dx$$



$= \dfrac{2}{3}$ ……………………………(答)

よって，求める面積 S は，
積分しなくても面積公式より，

$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3 = \frac{|1|}{12}\left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right)^3$$

$= \dfrac{1}{12} \cdot 2^3 = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$ と分かる！

では次，面積公式 (Ⅳ) を使う例題にも挑戦してみよう。

◆例題22◆

3 次関数 $C : y = f(x) = x^3 - 4x$ と，この曲線 C 上の点 $(1, f(1))$ における接線 l とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。

解答＆解説

曲線 C：$y=f(x)=x^3-4x$ ……①とおき，

①を x で微分すると，

$f'(x)=(x^3-4x)'=3x^2-4\cdot1=3x^2-4$

$\therefore\ f'(1)=3\cdot1^2-4=3-4=-1$

よって，曲線 C 上の点 $(1,\ \underbrace{-3}_{f(1)=1^3-4\cdot1=1-4=-3})$ における

曲線 C の接線 l の方程式は，

$y=-1\cdot(x-1)-3$　$\therefore\ y=-x-2$ ………②

$[y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)]$

①と②より，y を消去して，$x^3-4x=-x-2$

$x^3-3x+2=0 \longrightarrow \boxed{1\cdot x^3+0\cdot x^2-3\cdot x+2=0}$

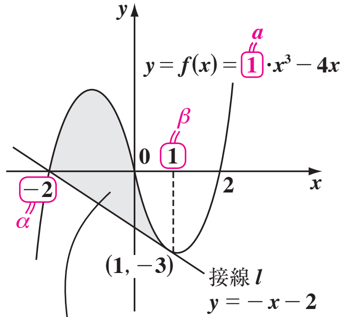
これを解いて，

$(x-1)^2\cdot(x+2)=0$

$\therefore\ x=\underset{\alpha}{\boxed{-2}},\ \underset{\beta}{\boxed{1}}$（重解）

交点の x 座標　接点の x 座標

接点の x 座標は重解になる



面積 $S=\dfrac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$

$=\dfrac{|1|}{12}\{1-(-2)\}^4$

$=\dfrac{1}{12}\cdot3^4$

$=\dfrac{81}{12}=\boxed{\dfrac{27}{4}}$

組立て除去

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1, & 0, & -3, & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1, & 1, & -2 & (0) \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{2} & (0) & \end{array}$$

$(x-1)^2$ で割って商が $(1\cdot x+2)$ になる

以上より，曲線 C と接線 l とで

囲まれる部分の面積 S は，

$$S=\int_{-2}^{1}\{f(x)-(-x-2)\}=\int_{-2}^{1}(x^3-4x+x+2)dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$$

面積公式の結果

面積 S は，面積公式から簡単に $\dfrac{27}{4}$ と求められるだけれど，積分計算を最後までキチンと解いて導いてもいい。同じ結果になることを，自分で確かめてみてごらん。