では，次の例題で，正四面体の体積計算にもチャレンジしてみよう。

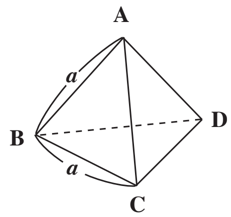
◆例題20◆

1辺の長さが $a(>0)$ の正四面体ABCDについて，次の問いに答えよ。

(i) △BCDの面積Sを求めよ。

(ii) 頂点Aから△BCDに下した垂線の長さ（高さ）h を求めよ。

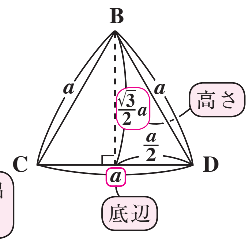
(iii) 四面体ABCDの体積Vを求めよ。



(i) △BCDは，右図に示すように，1辺の長さが $a(>0)$ の正三角形なので，その面積Sは

$$S=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{a}_{\text{底辺}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}a}_{\text{高さ}}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$ …①である。…(答)

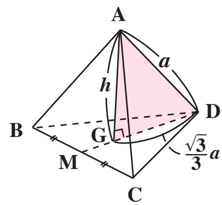
1辺の長さ a の正三角形の面積はよく出てくるので，これを公式として覚えよう！



(ii) 頂点Aから底面の△BCDに下した垂線の足をGとおくと，

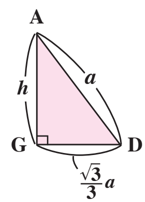
AG $=h$（正四面体の高さ）になる。

ここで，点Gは，△BCDの重心であるので，辺BCの中心をMとおくと，点Gは線分DMを2：1に内分する。



よって，$\mathrm{DG}=\frac{2}{3}\mathrm{DM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

よって，直角三角形AGDに三平方の定理を用いると，$a>0$，$h>0$ より



$$h^2+\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}_{\frac{3}{9}a^2=\frac{1}{3}a^2}=a^2 \qquad \text{よって，} h^2=\frac{2}{3}a^2$$

∴高さ $h=\mathrm{AG}=\sqrt{\frac{2}{3}a^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a$ ……②である。……(答)

(iii) 以上①，②より，求める正四面体 **ABCD** の体積 **V** は，

底面が正三角形の角すいなので，これを“正三角すい”と呼んでもいい。

$$\mathbf{V}=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\mathbf{S}}_{\text{底面積}}\cdot\underbrace{h}_{\text{高さ}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{3}\times12}a^3=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$ である。……(答)

● 角すい台や円すい台にもチャレンジしよう！

“**角すい台**”についても解説しておこう。図 **8** に示すように，三角すいや四角すいなどの角すいを底面に平行な平面で切ったとき，その切り口と底面との間にある部分を角すい台というんだね。図 **8** には，(i) 三角すい台と (ii) 四角すい台の例を示す。

同様に，図 **9** に示すように，円すいを底面に平行な平面で切ったとき，その切り口と底面との間にある部分を“**円すい台**”と呼ぶんだね。

この角すい台や円すい台の体積を求めるのに，相似な図形の相似比と，その面積比や体積比の関係が重要になる。図 **10**(i), (ii), (iii) に示すように，

(i) 相似比が $a:b$ の図形について，

(ii) その面積比は $a^2:b^2$ となり，また

(iii) その体積比は $a^3:b^3$ となるんだね。

それでは，次の例題で，実際に三角すい台の体積を求めてみることにしよう。

図 **8**

(i) 三角すい台　(ii) 四角すい台

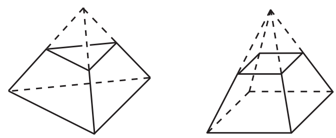


図 **9**　円すい台

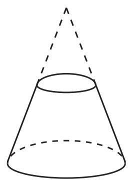
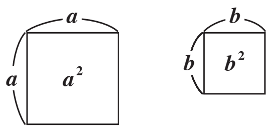


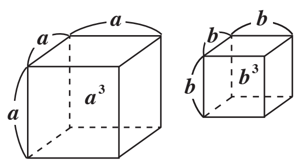
図 **10**　相似比と面積比と体積比

(i) 相似比 $a:b$

(ii) 面積比 $a^2:b^2$

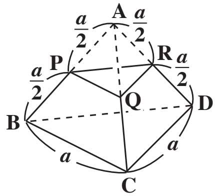


(iii) 体積比 $a^3:b^3$



◆例題21◆

1 辺の長さ $a(>0)$ の正四面体 **ABCD** の辺 **AB**，**AC**，**AD** の中点をそれぞれ **P**，**Q**，**R** とおく。このとき，三角すい台 **PQR-BCD** の体積 V' を求めよ。



三角すい台 **PQR-BCD** は，正四面体（正三角すい）**ABCD** から，相似比が $\frac{1}{2}$ の小さな正四面体（正三角すい）**APQR** を除いたものなんだね。

△**ABC** について
AP：**PB** ＝ **AQ**：**QC** ＝ **1**：**1** より，中点連結の定理から
PQ // **BC**
同様に，**QR** // **CD**，**RP** // **DB** となる。よって，△**PQR** は，底面の△**BCD** と平行なので，立体 **PQR-BCD** は三角すい台になるんだね。

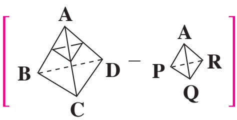
ここで，**1** 辺の長さ a の正四面体 **ABCD** の体積 **V** は，例題 **20**（**P230**）で既に求めた通り，$V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ……①

となるのは大丈夫だね。これから，相似比が $\frac{1}{2}$ の小さな正四面体 **APQR**

従って，体積比は $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ となる。

の体積 $\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot V=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ……② を差し引いたものが求める三角すい台 **PQR-BCD** の体積 V' になる。

$$\therefore\ V'=V-\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot V=\left(1-\frac{1}{8}\right)V=\frac{7}{8}\times\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{7\sqrt{2}}{96}a^3$$ ……………………（答）



● 2 つの球の位置関係も押さえておこう！

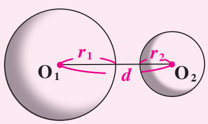
中心 O_1，半径 r_1 の球と，中心 O_2，半径 r_2 の球の位置関係について考えよう。ここで，半径に $r_1 \geqq r_2$ の大小関係があるものとする。また，**2** つの球の中心間の距離 $O_1O_2=d$ とおくと，**2** つの球の位置関係は，r_1 と r_2 と d によって，次のように表すことが出来る。これは，**2** つの円の位置関

係 (**P219**) と同様だから，覚えやすいはずだ。

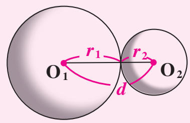
2 つの球の位置関係

2 つの球の半径をそれぞれ r_1, r_2 $(r_1 \geqq r_2)$ とおき，中心間の距離を d とおくと，

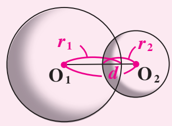
(i) $d > r_1 + r_2$ のとき
外離
(共有点なし)



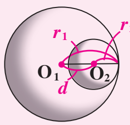
(ii) $d = r_1 + r_2$ のとき
外接
(接点をもつ)



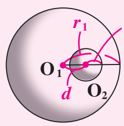
(iii) $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ のとき
交わる
(交わりの円をもつ)



(iv) $d = r_1 - r_2$ のとき
内接
(接点をもつ)



(v) $d < r_1 - r_2$ のとき
内離
(共有点なし)



最後に，球と平面の位置関係も，例で解説しておこう。

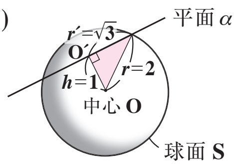
中心 **O**，半径 $r=2$ の球 **S** を，**O** からの距離 $h=1$ の平面 α で切った切り口には，図 **11**(i)，(ii) に示すように，円 (これを，“交わりの円” と呼ぶ) になるんだね。

この交わりの円の中心を **O′**，半径を r' とおくと，r' は，図 **11**(i) に示す直角三角形に三平方の定理を用いることにより，

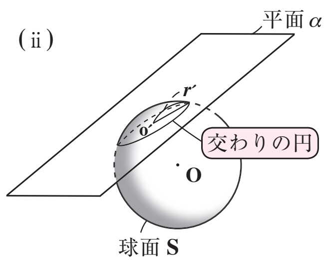
$r' = \sqrt{r^2 - h^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ と求めることもできるんだね。納得いった？

図 **11**　球と平面の交わりの円

(i)



(ii)



ではもう1題，$A \cdot B = n$ 型の整数問題を解いてみよう。

(ex) 整数 a，b が，$a^2 - b^2 = 3$ ……③をみたすとき，整数解の組 $(a,\ b)$ をすべて求めてみよう。

③の左辺を変形すると

$(a+b)(a-b) = 3$ ……④となる。

もう，$A \cdot B = n$ 型が完成したんだね。

ここで，a，b は整数より，$a+b$ と $a-b$ は共に整数で，これらの積が3となる組合せは，右の表の4通りだけなんだね。

表

$a+b$	1	3	-1	-3
$a-b$	3	1	-3	-1

(i) $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=3 \end{cases}$ のとき

$(a,\ b) = (2,\ -1)$ である。

$\begin{cases} a+b=1 \text{ ……㋐} \\ a-b=3 \text{ ……㋑} \end{cases}$

㋐＋㋑より $2a = 4$ $\therefore a = 2$

㋐－㋑より $2b = -2$ $\therefore b = -1$

(ii) $\begin{cases} a+b=3 \\ a-b=1 \end{cases}$ のとき

$(a,\ b) = (2,\ 1)$ である。

$\begin{cases} a+b=3 \text{ ……㋐} \\ a-b=1 \text{ ……㋑} \end{cases}$

㋐＋㋑より $2a = 4$ $\therefore a = 2$

㋐－㋑より $2b = 2$ $\therefore b = 1$

(iii) $\begin{cases} a+b=-1 \\ a-b=-3 \end{cases}$ のとき

$(a,\ b) = (-2,\ 1)$ である。

$\begin{cases} a+b=-1 \text{ ……㋐} \\ a-b=-3 \text{ ……㋑} \end{cases}$

㋐＋㋑より $2a = -4$ $\therefore a = -2$

㋐－㋑より $2b = 2$ $\therefore b = 1$

(iv) $\begin{cases} a+b=-3 \\ a-b=-1 \end{cases}$ のとき

$(a,\ b) = (-2,\ -1)$ である。

$\begin{cases} a+b=-3 \text{ ……㋐} \\ a-b=-1 \text{ ……㋑} \end{cases}$

㋐＋㋑より $2a = -4$ $\therefore a = -2$

㋐－㋑より $2b = -2$ $\therefore b = -1$

以上(i)～(iv)より，③をみたす整数解の組 $(a,\ b)$ は，全部で $(a,\ b) = (2,\ -1)$，$(2,\ 1)$，$(-2,\ 1)$，$(-2,\ -1)$ の4通りのみであることが分かったんだね。

これで，$A \cdot B = n$ 型の整数問題の解法にも自信がもてるようになったと思う。この解法パターンを基本事項として，最後に示しておこう。

$A \cdot B = n$ 型の整数の方程式

$A \cdot B = n$ ……(＊)　(A，B：整数の式，n：整数)

の解は，n の約数を A, B に割り当てる右の表を用いて求めることができる。

表 1

A	1	n	…	-1	$-n$
B	n	1	…	$-n$	-1

● 範囲を押さえるタイプの整数問題にもチャレンジしよう！

$A \cdot B = n$ 型の整数問題と並んで，未知の整数の範囲を押さえて解くパターンの整数問題も，試験ではよく出題されるんだね。これについては，例題で実際に問題を解いて慣れることが一番なので，早速，次の例題で練習してみよう。

◆例題 11◆

正の整数 x，y，z が，$x+3y+5z=3xyz$ ……①　$(x \leqq y \leqq z)$ をみたす。このとき，正の整数解の組 (x, y, z) をすべて求めよ。

自然数が x，y，$z(x \leqq y \leqq z)$ で，$x+3y+5z=3xyz$ ……①をみたす (x, y, z) の組を求めるために，まず未知数の取り得る値の範囲を押さえることが大切なんだね。ここで，$x \leqq y \leqq z$ より，①から，

$$3xyz = x + 3y + 5z \leqq z + 3z + 5z = 9z$$

$x \leqq z$，$y \leqq z$ だからね

よって，$3xyz \leqq 9z$ より，両辺を $3z(>0)$ で割って

$xy \leqq 3$ ……②と範囲がしぼれたんだね。

②をみたす自然数 (x, y) の組は，$x \leqq y$ より

$(x, y)=(1, 1)$，$(1, 2)$，$(1, 3)$ の 3 通りだけだね。

うまく範囲がしぼれない失敗例も示しておくね。

$3xyz = x + 3y + 5z \geqq x + 3x + 5x = 9x$　$y \geqq x$，$z \geqq x$ だからね

よって，$3xyz \geqq 9x$ より，両辺を $3x(>0)$ で割って，$yz \geqq 3$ となるけれど，これをみたす (y, z) の組は無数にあるので，うれしくも何ともない結果なんだね。今の内に，こういう失敗もやっておくといいと思う。

(ⅰ) $(x, y)=(1, 1)$ のとき，①より

$1+3\cdot1+5z=3\cdot1\cdot1\cdot z \quad 4+5z=3z \quad 2z=-4$

$\therefore z=-2$ 　となって，z が正の整数の条件に反する。

よって，不適。

(ⅱ) $(x, y)=(1, 2)$ のとき，①より

$1+3\cdot2+5z=3\cdot1\cdot2\cdot z \quad 7+5z=6z \quad z=7$

これは，$x \leqq y \leqq z$ をみたす。　$\therefore (x, y, z)=(1, 2, 7)$

(ⅲ) $(x, y)=(1, 3)$ のとき，①より

$1+3\cdot3+5z=3\cdot1\cdot3\cdot z \quad 10+5z=9z \quad 4z=10$

$\therefore z=\dfrac{5}{2}$ 　となって，z が正の整数の条件に反する。

よって，不適。

以上(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)より，$x \leqq y \leqq z$ と①をみたす自然数の組 (x, y, z) は，$(x, y, z)=(1, 2, 7)$ の1組のみであることが，分かったんだね。……(答)
どう？面白かった？

ではもう1題，範囲を押さえる型の整数問題にチャレンジしてみよう。

(ex) 正の整数 a, b, c が $a+2b+3c=2abc$ …③をみたす。
このとき，正の整数解の組 (a, b, c) をすべて求めてみよう。

自然数 a, b, c で，$a+2b+3c=2abc$ …③をみたす (a, b, c) の組を求めるために，未知数の取り得る範囲を押さえよう。そのためには，まず，$a \leqq b \leqq c$ …④が成り立つものとして解いていこう。

> これは，範囲を押さえるための仮定で，もし仮に，この結果 $(a, b, c)=(1, 2, 3)$ が求まったとすると，④は問題文に与えられてはいないので，この並び替え，つまり $(a, b, c)=(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$ がすべて，③の解になるんだね。納得いった？

③，④より，

$2abc=a+2b+3c \leqq c+2c+3c=6c$ 　仮定より，$a \leqq c$，$b \leqq c$ だからね

よって，$2abc \leqq 6c$ より，この両辺を $2c(>0)$ で割って

$ab \leqq 3$ …⑤と，範囲が無事にしぼれたんだね。

⑤より，自然数の組(a, b)は$a \leqq b$より，
$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$ の3通りのみを調べればいいことが分かったんだね。

$a + 2b + 3c = 2abc$ ………③
$a \leqq b \leqq c$(仮定) …………④
$ab \leqq 3$……………………………⑤

(ⅰ) $(a, b) = (1, 1)$ のとき，③より，

$1 + 2 \cdot 1 + 3c = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot c$

$3 + 3c = 2c$

$\therefore c = -3$　となって，cが正の整数の条件に反する。

よって，不適。

(ⅱ) $(a, b) = (1, 2)$ のとき，③より

$1 + 2 \cdot 2 + 3c = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot c$

$5 + 3c = 4c$

$\therefore c = 5$　となって，これは $a \leqq b \leqq c$ の条件をみたす。

$\therefore (a, b, c) = (1, 2, 5)$

(ⅲ) $(a, b) = (1, 3)$ のとき，③より

$1 + 2 \cdot 3 + 3c = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot c$

$7 + 3c = 6c$　$3c = 7$

$\therefore c = \frac{7}{3}$ となって，cが正の整数の条件に反する。

よって，不適。

以上(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)より，$a \leqq b \leqq c$ と $a + 2b + 3c = 2abc$ …③をみたす自然数の組(a, b, c)は，$(a, b, c) = (1, 2, 5)$ の1組のみである。
しかし，$a \leqq b \leqq c$ の条件は元々の問題文にはないので，③をみたす自然数の組(a, b, c)は，これを並べ替えて得られるすべてのものになるんだね。
よって，求める解は，

$(a, b, c) = (1, 2, 5), (1, 5, 2), (2, 1, 5), (2, 5, 1)$
$(5, 1, 2), (5, 2, 1)$ の6通りであることが，分かったんだね。
大丈夫だった？

このように，範囲を押さえるタイプの整数問題では，問題文に $a \leqq b \leqq c$ の条件がなくても，自分で $a \leqq b \leqq c$ の条件を設定して，解いていけばいいんだね。もちろん，これは整数問題を解くために便宜的に仮定したものに過ぎないので，1 組の解が得られたら，その並べ替えまでシッカリやって答えとすることを忘れないでくれ！これで，整数問題の解法にもかなり自信が付いたでしょう？

● 最大公約数 g と最小公倍数 L も押さえよう！

2 つの正の整数 (自然数) a，b について，**最大公約数** g と**最小公倍数** L を次のように定義するので，まず頭に入れておこう。

最大公約数 g と最小公倍数 L

2 つの正の整数 a，b について，

(i) a と b の共通の約数 (公約数) の中で最大のものを最大公約数 g という。

“**最大公約数**” (*greatest common measure*) の頭文字の g をとった！

(ii) a と b の共通の倍数 (公倍数) の中で最小のものを最小公倍数 L という。

“**最小公倍数**” (*least common multiple*) の頭文字の大文字 L をとった！

ここで，正の整数 a，b の最大公約数 g が $g = 1$ のとき，a と b は “**互いに素**” ということも覚えておこう。たとえば，10 と 21 の最大公約数 $g = 1$ より，これらは互いに素と言えるんだね。

(ex1) $a = 360$，$b = 756$ のとき，
a，b に対して右のような割り算を行うことにより，
最大公約数 $g = 2^2 \times 3^2$
$= 36$

g	2)	360	756
	2)	180	378
	3)	90	189
	3)	30	63
		10	21
L		互いに素	

最小公倍数 $L = 2^2 \times 3^2 \times 10 \times 21 = 7560$ が導けるんだね。

四面体の体積

絶対暗記問題 66	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

1 辺の長さが $2a$ の正方形 **ABCD** の紙がある。辺 **AB**，**BC** の中点をそれぞれ **E**，**F** とする。線分 **DE**，**EF**，**FD** を折り目にして，頂点 **A**，**B**，**C** を重ねて **1** つの頂点 **P** にし，四面体 **PDEF** をつくる。次の問いに答えよ。

(1) △**DEF** の面積 S を求めよ。

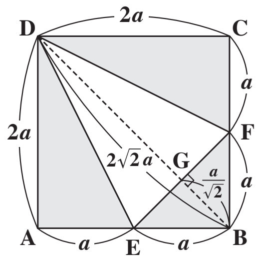
(2) 線分 **EF** の中点を **G** とおく。△**PDG** の **3** 辺 **PD**，**DG**，**GP** の長さを求め，△**PDG** が直角三角形であることを示せ。

(3) 四面体 **PDEF** の体積 V を求めよ。　　(関西大＊)

ヒント！ 四面体(三角すい)**PDEF** の体積 V を求めるために，(1) で，まず底面の△**DEF** の面積 S を求め，(2) の導入を利用して，高さ h を求め，そして (3) で，公式 $V=\frac{1}{3}Sh$ を利用して，計算すればいいんだね。

解答＆解説

(1) 右図に示すように，**1** 辺の長さ $2a$ の正方形 **ABCD** について，辺 **AB** と **BC** の中点を順に **E**，**F** とおく。このとき△**DEF** の面積 S は，正方形 **ABCD** の面積 $(2a)^2$ から，**3** つの三角形△**BFE**，△**CDF**，△**DAE** の面積の総和を差し引いたものに等しい。

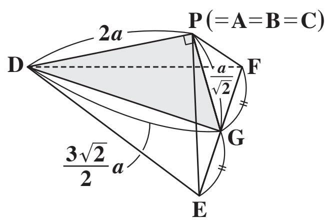


$$\therefore S=(2a)^2-\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a+2\times\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2a\right)$$

これは，四面体 **PDEF** の底面積になるね。

$$=4a^2-\left(\frac{1}{2}a^2+2a^2\right)=\frac{3}{2}a^2 \quad\cdots\cdots①$$ ……………………(答)

(2) 線分 **DE**，**EF**，**FD** を折り目にして折って，**3** 点 **A**，**B**，**C** を重ねて **P** としてできる四面体 **PDEF** を右に示す。
線分 **EF** の中点を **G** とおいて，△**PDG** の **3** 辺 **PD**，**DG**，**GP** の長さを求める。



$$\begin{cases} \mathbf{PD} = \mathbf{AD} = 2a \\ \mathbf{GP} = \mathbf{GB} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a \\ \mathbf{DG} = \mathbf{DB} - \mathbf{GB} = 2\sqrt{2}a - \dfrac{\sqrt{2}}{2}a = \dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}a = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}a \end{cases}$$

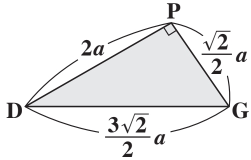
∵△GBF も△DBC も
直角二等辺三角形

$\therefore$ $\mathbf{PD} = 2a$, $\mathbf{DG} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$, $\mathbf{GP} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ ……………………………(答)

これから，$\mathbf{PD}^2 + \mathbf{GP}^2$ を求めると，

$$\mathbf{PD}^2 + \mathbf{GP}^2 = (2a)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = 4a^2 + \frac{1}{2}a^2$$

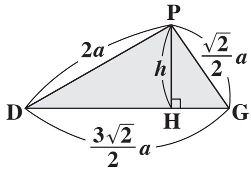
$$= \frac{9}{2}a^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \mathbf{DG}^2$$



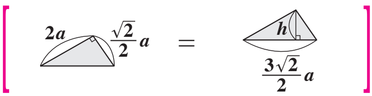
となって，三平方の定理が成り立つ。よって，

△PDG は，∠GPD = 90° の直角三角形である。…………………………(終)

(3) (2) の結果より，△PDG について頂点 P から辺 DG に下した垂線の足を H とおき，PH = h とおいて，これを△PDG の面積 S' から求めると，



$$S' = \boxed{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a \times 2a = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}a \times h} \quad \text{より}$$



これは，四面体 PDEF
の高さになるね。

$$\frac{3\sqrt{2}}{4}a \cdot h = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 \qquad \therefore\ h = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}a \times \frac{4}{3\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{2}{3}a \ \cdots\cdots ②$$

以上①，②より，四面体 PDEF の体積 V は，

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}a^2 \times \frac{\cancel{2}}{3}a = \frac{1}{3}a^3 \text{ である。}$$ ……………………(答)

1 次不定方程式とユークリッドの互除法 (Ⅱ)

絶対暗記問題 60	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

次の 1 次不定方程式の整数解 (x, y) の組をすべて求めよ。

(1) $269x - 121y = 1$ ……①　　(2) $269x - 121y = 5$ ……②

ヒント！ (1) ①をみたす 1 組の整数解 (x_1, y_1) を求めるために，269 と 121 の最大公約数 g が 1 であることを，ユークリッドの互除法を使って示せばいい。(2) は，(1) の結果を利用すれば，楽に答えが求められるはずだ。頑張ろう！

解答＆解説

(1) $269x - 121y = 1$ …① (x，y：整数) の係数 269 と 121 の最大公約数 g を，右のようにユークリッドの互除法で求めた結果，$g = 1$ となった。よって，269 と 121 は互いに素である。

ユークリッドの互除法

$269 = 121 \times 2 + 27$ ……③

$121 = 27 \times 4 + 13$ ……④

$27 = 13 \times 2 + 1$ ……⑤

$13 = 1 \times 13$

最大公約数 $g = 1$

これから 269 と 121 は互いに素

ここで，③，④，⑤を変形して，

$$\begin{cases} 269 - 2 \times 121 = 27 & \cdots\cdots③' \\ 121 - 4 \times 27 = 13 & \cdots\cdots④' \\ 27 - 2 \times 13 = 1 & \cdots\cdots⑤' \end{cases}$$

ここで，④′を⑤′に代入して，$27 - 2\cdot(121 - 4 \times 27) = 1$

$9\cdot 27 - 2\cdot 121 = 1$ ……⑤″　さらに⑤″に③′を代入して，

$9\cdot(269 - 2 \times 121) - 2\cdot 121 = 1$

$\therefore\ 269 \times 9 - 121 \times 20 = 1$ ……⑥ となる。

$(x_1, y_1) = (9, 20)$ が，①の 1 組の解になる。

よって，① − ⑥より，

$269(x - 9) - 121(y - 20) = 0$

$$\begin{cases} 269x - 121y = 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots① \\ 269\cdot 9 - 121\cdot 20 = 1 & \cdots\cdots⑥ \end{cases}$$

① − ⑥より，

$269(x - 9) - 121(y - 20) = 1 - 1$

$\therefore\ 269\cdot\underbrace{(x - 9)}_{121k} = 121\cdot\underbrace{(y - 20)}_{269k\ (k:\text{整数})}$ ……⑦ となる。

ここで，269 と 121 は互いに素より，⑦から $x - 9$ は 121 の倍数であり，かつ $y - 20$ は 269 の倍数である。

よって，$\underline{\underline{x-9=121k}}$ (k：整数) とおくと，⑦は，

$269\times\cancel{121}k=\cancel{121}\times(y-20)$ となるので，

$\underline{\underline{y-20=269k}}$ (k：整数) となる。

これから，①の1次不定方程式の整数解 $(x,\ y)$ の組は，

$(x,\ y)=(121k+9,\ 269k+20)$ (k：整数) である。……………………(答)

(2) $269x-121y=5$ ……② ($x,\ y$：整数) の

1組の解を $(x_1{}',\ y_1{}')$ とおくと，これは⑥の両辺に5をかけることにより，

$5\cdot(269\times9-121\times20)=5\times1$

$269\times\underline{45}-121\times\underline{100}=5$ ……⑧

$(x_1{}',\ y_1{}')=(45,\ 100)$ が，②の1組の整数解になる。

よって，② − ⑧より，

$269(x-45)-121(y-100)=0$

$269x-121y=5$ ……………②
$269\cdot45-121\cdot100=5$ ……⑧
② − ⑧より，
$269(x-45)-121(y-100)=5-5$

$\therefore\ 269\underbrace{(x-45)}_{121l}=121\underbrace{(y-100)}_{269l\ (l：整数)}$

ここで，269と121は互いに素より，$x-45$ は121の倍数であり，$y-100$ は269の倍数である。

よって，$x-45=121l$ とおくと，$y-100=269l$ (l：整数) となる。

これから，②の1次不定方程式の整数解 $(x,\ y)$ の組は

$(x,\ y)=(121l+45,\ 269l+100)$ (l：整数) である。 ………………(答)

頻出問題にトライ・22	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

13で割ると2余り，7で割ると5余るような正の整数のうち3桁で最小のものを求めよ。

解答は P255