四面体の体積

絶対暗記問題 66	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

1 辺の長さが $2a$ の正方形 **ABCD** の紙がある。辺 **AB**，**BC** の中点をそれぞれ **E**，**F** とする。線分 **DE**，**EF**，**FD** を折り目にして，頂点 **A**，**B**，**C** を重ねて 1 つの頂点 **P** にし，四面体 **PDEF** をつくる。次の問いに答えよ。

(1) △**DEF** の面積 S を求めよ。

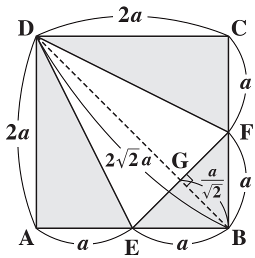
(2) 線分 **EF** の中点を **G** とおく。△**PDG** の 3 辺 **PD**，**DG**，**GP** の長さを求め，△**PDG** が直角三角形であることを示せ。

(3) 四面体 **PDEF** の体積 V を求めよ。 (関西大＊)

ヒント！ 四面体(三角すい)**PDEF** の体積 V を求めるために，(1) で，まず底面の△**DEF** の面積 S を求め，(2) の導入を利用して，高さ h を求め，そして (3) で，公式 $V=\frac{1}{3}Sh$ を利用して，計算すればいいんだね。

解答＆解説

(1) 右図に示すように，1 辺の長さ $2a$ の正方形 **ABCD** について，辺 **AB** と **BC** の中点を順に **E**, **F** とおく。このとき△**DEF** の面積 S は，正方形 **ABCD** の面積 $(2a)^2$ から，3 つの三角形△**BFE**，△**CDF**，△**DAE** の面積の総和を差し引いたものに等しい。



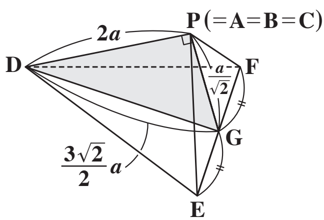
$$\therefore S=(2a)^2-\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a+2\times\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2a\right)$$

これは，四面体 **PDEF** の底面積になるね。

$$=4a^2-\left(\frac{1}{2}a^2+2a^2\right)=\frac{3}{2}a^2 \quad \cdots\cdots①$$ ……………………(答)

(2) 線分 **DE**, **EF**, **FD** を折り目にして折って，3 点 **A**, **B**, **C** を重ねて **P** としてできる四面体 **PDEF** を右に示す。

線分 **EF** の中点を **G** とおいて，△**PDG** の 3 辺 **PD**，**DG**，**GP** の長さを求める。



$$\begin{cases} \mathbf{PD} = \mathbf{AD} = 2a \\ \mathbf{GP} = \mathbf{GB} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a \\ \mathbf{DG} = \mathbf{DB} - \mathbf{GB} = 2\sqrt{2}a - \dfrac{\sqrt{2}}{2}a = \dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}a = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}a \end{cases}$$

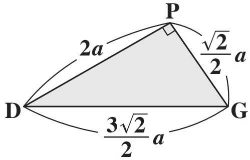
∵△**GBF**も△**DBC**も直角二等辺三角形

$\therefore$ $\mathbf{PD} = 2a$, $\mathbf{DG} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$, $\mathbf{GP} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ ……………………………………(答)

これから，$\mathbf{PD}^2 + \mathbf{GP}^2$ を求めると，

$$\mathbf{PD}^2 + \mathbf{GP}^2 = (2a)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = 4a^2 + \frac{1}{2}a^2$$

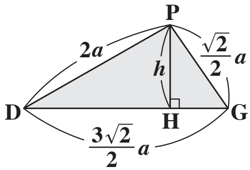
$$= \frac{9}{2}a^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \mathbf{DG}^2$$



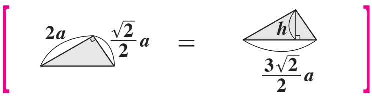
となって，三平方の定理が成り立つ。よって，

△**PDG** は，∠**GPD** = **90**° の直角三角形である。……………………………(終)

(3) **(2)** の結果より，△**PDG** について頂点 **P** から辺 **DG** に下した垂線の足を **H** とおき，$\mathbf{PH} = h$ とおいて，これを△**PDG** の面積 S' から求めると，



$$S' = \boxed{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a \times 2a = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}a \times h} \quad \text{より}$$



$$\frac{3\sqrt{2}}{4}a \cdot h = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 \qquad \therefore\ h = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}a \times \frac{4}{3\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{2}{3}a \cdots\cdots ②$$

これは，四面体 **PDEF** の高さになるね。

以上①，②より，四面体 **PDEF** の体積 V は，

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}a^2 \times \frac{\cancel{2}}{3}a = \frac{1}{3}a^3 \quad \text{である。}$$ ……………………(答)