ではもう1題，$A \cdot B = n$ 型の整数問題を解いてみよう。

(ex) 整数 a，b が，$a^2 - b^2 = 3$ ……③をみたすとき，整数解の組 $(a,\ b)$ をすべて求めてみよう。

③の左辺を変形すると

$(a+b)(a-b) = 3$ ……④となる。

もう，$A \cdot B = n$ 型が完成したんだね。

ここで，a，b は整数より，$a+b$ と $a-b$ は共に整数で，これらの積が3となる組合せは，右の表の4通りだけなんだね。

表

$a+b$	1	3	-1	-3
$a-b$	3	1	-3	-1

(i) $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=3 \end{cases}$ のとき

$(a,\ b) = (2,\ -1)$ である。

$\begin{cases} a+b=1 \cdots\cdots ㋐ \\ a-b=3 \cdots\cdots ㋑ \end{cases}$
㋐＋㋑より $2a=4$ $\therefore a=2$
㋐－㋑より $2b=-2$ $\therefore b=-1$

(ii) $\begin{cases} a+b=3 \\ a-b=1 \end{cases}$ のとき

$(a,\ b) = (2,\ 1)$ である。

$\begin{cases} a+b=3 \cdots\cdots ㋐ \\ a-b=1 \cdots\cdots ㋑ \end{cases}$
㋐＋㋑より $2a=4$ $\therefore a=2$
㋐－㋑より $2b=2$ $\therefore b=1$

(iii) $\begin{cases} a+b=-1 \\ a-b=-3 \end{cases}$ のとき

$(a,\ b) = (-2,\ 1)$ である。

$\begin{cases} a+b=-1 \cdots\cdots ㋐ \\ a-b=-3 \cdots\cdots ㋑ \end{cases}$
㋐＋㋑より $2a=-4$ $\therefore a=-2$
㋐－㋑より $2b=2$ $\therefore b=1$

(iv) $\begin{cases} a+b=-3 \\ a-b=-1 \end{cases}$ のとき

$(a,\ b) = (-2,\ -1)$ である。

$\begin{cases} a+b=-3 \cdots\cdots ㋐ \\ a-b=-1 \cdots\cdots ㋑ \end{cases}$
㋐＋㋑より $2a=-4$ $\therefore a=-2$
㋐－㋑より $2b=-2$ $\therefore b=-1$

以上 (i) ～ (iv) より，③をみたす整数解の組 $(a,\ b)$ は，全部で $(a,\ b) = (2,\ -1)$，$(2,\ 1)$，$(-2,\ 1)$，$(-2,\ -1)$ の4通りのみであることが分かったんだね。

これで，$A \cdot B = n$ 型の整数問題の解法にも自信がもてるようになったと思う。この解法パターンを基本事項として，最後に示しておこう。

$A \cdot B = n$ 型の整数の方程式

$A \cdot B = n$ ……(＊)　(A，B：整数の式，n：整数)

の解は，n の約数を A，B に割り当てる右の表を用いて求めることができる。

表 1

A	1	n	…	-1	$-n$
B	n	1	…	$-n$	-1

● 範囲を押さえるタイプの整数問題にもチャレンジしよう！

$A \cdot B = n$ 型の整数問題と並んで，未知の整数の範囲を押さえて解くパターンの整数問題も，試験ではよく出題されるんだね。これについては，例題で実際に問題を解いて慣れることが一番なので，早速，次の例題で練習してみよう。

◆例題 11◆

正の整数 x，y，z が，$x+3y+5z=3xyz$ ……①　$(x \leqq y \leqq z)$ をみたす。このとき，正の整数解の組 (x, y, z) をすべて求めよ。

自然数が x，y，$z(x \leqq y \leqq z)$ で，$x+3y+5z=3xyz$ ……①をみたす (x, y, z) の組を求めるために，まず未知数の取り得る値の範囲を押さえることが大切なんだね。ここで，$x \leqq y \leqq z$ より，①から，

$$3xyz = x + 3y + 5z \leqq z + 3z + 5z = 9z$$

$x \leqq z$，$y \leqq z$ だからね

よって，$3xyz \leqq 9z$ より，両辺を $3z(>0)$ で割って

$xy \leqq 3$ ……②と範囲がしぼれたんだね。

②をみたす自然数 (x, y) の組は，$x \leqq y$ より

$(x, y) = (1, 1)$，$(1, 2)$，$(1, 3)$ の 3 通りだけだね。

うまく範囲がしぼれない失敗例も示しておくね。

$3xyz = x + 3y + 5z \geqq x + 3x + 5x = 9x$　$y \geqq x$，$z \geqq x$ だからね

よって，$3xyz \geqq 9x$ より，両辺を $3x(>0)$ で割って，$yz \geqq 3$ となるけれど，これをみたす (y, z) の組は無数にあるので，うれしくも何ともない結果なんだね。今の内に，こういう失敗もやっておくといいと思う。

(ⅰ) $(x, y) = (1, 1)$ のとき，①より

$1 + 3 \cdot 1 + 5z = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot z \quad 4 + 5z = 3z \quad 2z = -4$

$\therefore z = -2$ となって，z が正の整数の条件に反する。

よって，不適。

(ⅱ) $(x, y) = (1, 2)$ のとき，①より

$1 + 3 \cdot 2 + 5z = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot z \quad 7 + 5z = 6z \quad z = 7$

これは，$x \leqq y \leqq z$ をみたす。　$\therefore (x, y, z) = (1, 2, 7)$

(ⅲ) $(x, y) = (1, 3)$ のとき，①より

$1 + 3 \cdot 3 + 5z = 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot z \quad 10 + 5z = 9z \quad 4z = 10$

$\therefore z = \dfrac{5}{2}$ となって，z が正の整数の条件に反する。

よって，不適。

以上 (ⅰ)(ⅱ)(ⅲ) より，$x \leqq y \leqq z$ と①をみたす自然数の組 (x, y, z) は，$(x, y, z) = (1, 2, 7)$ の 1 組のみであることが，分かったんだね。……(答)
どう？面白かった？

ではもう 1 題，範囲を押さえる型の整数問題にチャレンジしてみよう。

(ex) 正の整数 a, b, c が $a + 2b + 3c = 2abc$ …③をみたす。
このとき，正の整数解の組 (a, b, c) をすべて求めてみよう。

自然数 a, b, c で，$a + 2b + 3c = 2abc$ …③をみたす (a, b, c) の組を求めるために，未知数の取り得る範囲を押さえよう。そのためには，まず，$a \leqq b \leqq c$ …④が成り立つものとして解いていこう。

これは，範囲を押さえるための仮定で，もし仮に，この結果 $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ が求まったとすると，④は問題文に与えられてはいないので，この並び替え，つまり $(a, b, c) = (1, 2, 3)$，$(1, 3, 2)$，$(2, 1, 3)$，$(2, 3, 1)$，$(3, 1, 2)$，$(3, 2, 1)$ がすべて，③の解になるんだね。納得いった？

③，④より，

$2abc = a + 2b + 3c \leqq c + 2c + 3c = 6c$

仮定より，$a \leqq c$，$b \leqq c$ だからね

よって，$2abc \leqq 6c$ より，この両辺を $2c (> 0)$ で割って

$ab \leqq 3$ …⑤と，範囲が無事にしぼれたんだね。

⑤より，自然数の組 (a, b) は $a \leqq b$ より，
$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$ の 3 通りのみを調べればいいことが分かったんだね。

$a + 2b + 3c = 2abc$ ………③
$a \leqq b \leqq c$ (仮定) …………④
$ab \leqq 3$ ………………………⑤

(ⅰ) $(a, b) = (1, 1)$ のとき，③より，

$1 + 2 \cdot 1 + 3c = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot c$

$3 + 3c = 2c$

$\therefore c = -3$　となって，c が正の整数の条件に反する。

よって，不適。

(ⅱ) $(a, b) = (1, 2)$ のとき，③より

$1 + 2 \cdot 2 + 3c = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot c$

$5 + 3c = 4c$

$\therefore c = 5$　となって，これは $a \leqq b \leqq c$ の条件をみたす。

$\therefore (a, b, c) = (1, 2, 5)$

(ⅲ) $(a, b) = (1, 3)$ のとき，③より

$1 + 2 \cdot 3 + 3c = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot c$

$7 + 3c = 6c$　$3c = 7$

$\therefore c = \frac{7}{3}$ となって，c が正の整数の条件に反する。

よって，不適。

以上(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)より，$a \leqq b \leqq c$ と $a + 2b + 3c = 2abc$ …③をみたす自然数の組 (a, b, c) は，$(a, b, c) = (1, 2, 5)$ の 1 組のみである。
しかし，$a \leqq b \leqq c$ の条件は元々の問題文にはないので，③をみたす自然数の組 (a, b, c) は，これを並べ替えて得られるすべてのものになるんだね。
よって，求める解は，

$(a, b, c) = (1, 2, 5), (1, 5, 2), (2, 1, 5), (2, 5, 1)$
$(5, 1, 2), (5, 2, 1)$ の 6 通りであることが，分かったんだね。
大丈夫だった？

このように，範囲を押さえるタイプの整数問題では，問題文に $a \leqq b \leqq c$ の条件がなくても，自分で $a \leqq b \leqq c$ の条件を設定して，解いていけばいいんだね。もちろん，これは整数問題を解くために便宜的に仮定したものに過ぎないので，1 組の解が得られたら，その並べ替えまでシッカリやって答えとすることを忘れないでくれ！これで，整数問題の解法にもかなり自信が付いたでしょう？

● 最大公約数 g と最小公倍数 L も押さえよう！

2 つの正の整数(自然数) a，b について，**最大公約数** g と**最小公倍数** L を次のように定義するので，まず頭に入れておこう。

最大公約数 g と最小公倍数 L

2 つの正の整数 a，b について，

(i) a と b の共通の約数(公約数)の中で最大のものを最大公約数 g という。

“**最大公約数**”(*greatest common measure*)の頭文字の g をとった！

(ii) a と b の共通の倍数(公倍数)の中で最小のものを最小公倍数 L という。

“**最小公倍数**”(*least common multiple*)の頭文字の大文字 L をとった！

ここで，正の整数 a，b の最大公約数 g が $g = 1$ のとき，a と b は“**互(たが)いに素(そ)**”ということも覚えておこう。たとえば，10 と 21 の最大公約数 $g = 1$ より，これらは互いに素と言えるんだね。

(ex1) $a = 360$，$b = 756$ のとき，a，b に対して右のような割り算を行うことにより，

$$\begin{array}{r|rr}
2 & 360 & 756 \\ \hline
2 & 180 & 378 \\ \hline
3 & 90 & 189 \\ \hline
3 & 30 & 63 \\ \hline
 & 10 & 21
\end{array}$$

g　L　互いに素

最大公約数 $g = 2^2 \times 3^2 = 36$

最小公倍数 $L = 2^2 \times 3^2 \times 10 \times 21 = 7560$ が導けるんだね。