では，次の例題で，正四面体の体積計算にもチャレンジしてみよう。

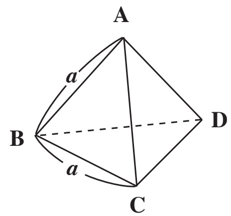
◆例題 20◆

1 辺の長さが $a(>0)$ の正四面体 **ABCD** について，次の問いに答えよ。

(ⅰ) △ **BCD** の面積 **S** を求めよ。

(ⅱ) 頂点 **A** から△**BCD** に下した垂線の長さ (高さ) h を求めよ。

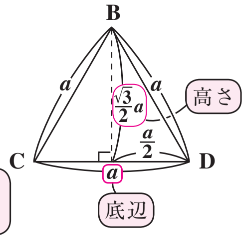
(ⅲ) 四面体 **ABCD** の体積 **V** を求めよ。



(ⅰ) △ **BCD** は，右図に示すように，**1** 辺の長さが $a(>0)$ の正三角形なので，その面積 **S** は

$$S = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{a}_{底辺} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}a}_{高さ} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \quad \cdots ①\text{である。}\cdots(\text{答})$$

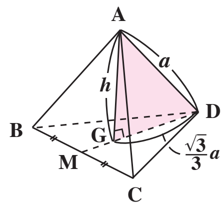
1 辺の長さ a の正三角形の面積はよく出てくるので，これを公式として覚えよう！



(ⅱ) 頂点 **A** から底面の△ **BCD** に下した垂線の足を **G** とおくと，

AG $= h$ (正四面体の高さ) になる。

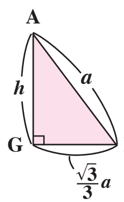
ここで，点 **G** は，△ **BCD** の重心であるので，辺 **BC** の中心を **M** とおくと，点 **G** は線分 **DM** を **2**：**1** に内分する。



よって，$DG = \frac{2}{3}DM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

よって，直角三角形 **AGD** に三平方の定理を用いると，$a>0$，$h>0$ より

$$h^2 + \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}_{\frac{3}{9}a^2 = \frac{1}{3}a^2} = a^2 \qquad \text{よって，} h^2 = \frac{2}{3}a^2$$



$$\therefore \text{高さ } h = AG = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a \quad \cdots\cdots ②\text{である。}\cdots\cdots(\text{答})$$

(iii) 以上①，②より，求める正四面体 ABCD の体積 V は，

底面が正三角形の角すいなので，これを“正三角すい”と呼んでもいい。

$$V=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{S}_{\text{底面積}}\cdot\underbrace{h}_{\text{高さ}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{3}\times12}a^3=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$ である。……(答)

● 角すい台や円すい台にもチャレンジしよう！

“**角すい台**”についても解説しておこう。図 8 に示すように，三角すいや四角すいなどの角すいを底面に平行な平面で切ったとき，その切り口と底面との間にある部分を角すい台というんだね。図 8 には，(i) 三角すい台と(ii) 四角すい台の例を示す。

同様に，図 9 に示すように，円すいを底面に平行な平面で切ったとき，その切り口と底面との間にある部分を“**円すい台**”と呼ぶんだね。

この角すい台や円すい台の体積を求めるのに，相似な図形の相似比と，その面積比や体積比の関係が重要になる。図 10(i)，(ii)，(iii) に示すように，

(i) 相似比が $a:b$ の図形について，
(ii) その面積比は $a^2:b^2$ となり，また
(iii) その体積比は $a^3:b^3$ となるんだね。

それでは，次の例題で，実際に三角すい台の体積を求めてみることにしよう。

図 8
(i) 三角すい台　(ii) 四角すい台

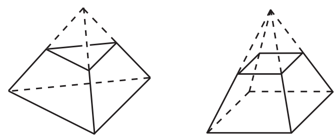


図 9　円すい台

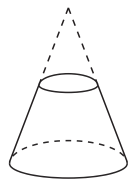
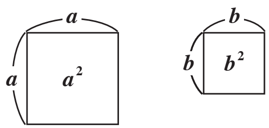


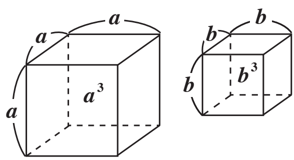
図 10　相似比と面積比と体積比

(i) 相似比 $a:b$

(ii) 面積比 $a^2:b^2$

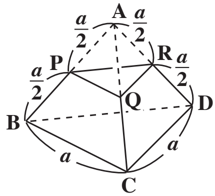


(iii) 体積比 $a^3:b^3$



◆例題21◆

1 辺の長さ $a(>0)$ の正四面体 **ABCD** の辺 **AB**，**AC**，**AD** の中点をそれぞれ **P**，**Q**，**R** とおく。このとき，三角すい台 **PQR-BCD** の体積 V' を求めよ。



三角すい台 **PQR-BCD** は，正四面体(正三角すい)**ABCD** から，相似比が $\frac{1}{2}$ の小さな正四面体(正三角すい)**APQR** を除いたものなんだね。

ここで，**1** 辺の長さ a の正四面体 **ABCD** の体積 V は，例題 **20** (**P230**) で既に求めた通り，$V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ……①

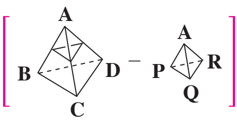
△**ABC** について
AP：**PB**＝**AQ**：**QC**＝**1**：**1** より，中点連結の定理から
PQ∥**BC**
同様に，**QR**∥**CD**，**RP**∥**DB** となる。よって，△**PQR** は，底面の△**BCD** と平行なので，立体 **PQR-BCD** は三角すい台になるんだね。

となるのは大丈夫だね。これから，相似比が $\frac{1}{2}$ の小さな正四面体 **APQR**

従って，体積比は $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ となる。

の体積 $\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot V=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ……② を差し引いたものが求める三角すい台 **PQR-BCD** の体積 V' になる。

$\therefore\ V'=V-\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot V=\left(1-\frac{1}{8}\right)V=\frac{7}{8}\times\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{7\sqrt{2}}{96}a^3$ ……………………(答)



● 2つの球の位置関係も押さえておこう！

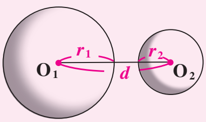
中心 O_1，半径 r_1 の球と，中心 O_2，半径 r_2 の球の位置関係について考えよう。ここで，半径に $r_1 \geqq r_2$ の大小関係があるものとする。また，**2** つの球の中心間の距離 $O_1O_2=d$ とおくと，**2** つの球の位置関係は，r_1 と r_2 と d によって，次のように表すことが出来る。これは，**2** つの円の位置関

係 (**P219**) と同様だから，覚えやすいはずだ。

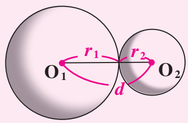
2 つの球の位置関係

2 つの球の半径をそれぞれ r_1，r_2 $(r_1 \geqq r_2)$ とおき，中心間の距離を d とおくと，

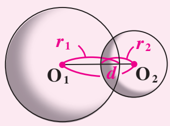
(i) $d > r_1 + r_2$ のとき
外離
(共有点なし)



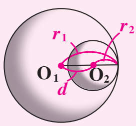
(ii) $d = r_1 + r_2$ のとき
外接
(接点をもつ)



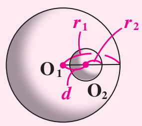
(iii) $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ のとき
交わる
(交わりの円をもつ)



(iv) $d = r_1 - r_2$ のとき
内接
(接点をもつ)



(v) $d < r_1 - r_2$ のとき
内離
(共有点なし)



最後に，球と平面の位置関係も，例で解説しておこう。

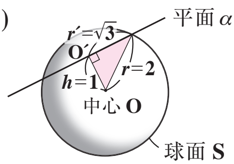
中心 **O**，半径 $r = 2$ の球 **S** を，**O** からの距離 $h = 1$ の平面 α で切った切り口には，図 **11**(i)，(ii) に示すように，円 (これを，“交(まじ)わりの円” と呼ぶ) になるんだね。

この交わりの円の中心を **O′**，半径を r' とおくと，r' は，図 **11**(i) に示す直角三角形に三平方の定理を用いることにより，

$r' = \sqrt{r^2 - h^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ と求めることもできるんだね。納得いった？

図 **11**　球と平面の交わりの円

(i)



(ii)