母平均の区間推定の応用

絶対暗記問題 60	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

全国の **100** 万人の学生を対象に英語のテストを行った。この採点結果を母集団として，これから $n = 256$ 人の成績を無作為に標本抽出した結果，標本平均 $\overline{X}$ が **74** 点，標本標準偏差 S が **12** 点であった。このとき，次の各問いに答えよ。(ただし，標本の大きさが変化しても，標本平均 $\overline{X}$ と標本標準偏差 S の値は変化しないものとする。)

(1) 母平均 m の (i) **95** % 信頼区間と (ii) **99** % 信頼区間を求めよ。
(ただし，小数第 **3** 位を四捨五入せよ。)

(2) **(1)** の m の **95** % 信頼区間の幅を半分にするための標本の大きさ n' の値を求めよ。

(3) **(1)** の m の **99** % 信頼区間の幅を **2** 以下にするためには，少なくとも標本の大きさ n'' をいくつにすればよいか。

ヒント！ **(1)** 標本の大きさ $n = 256$ は十分に大きいと考えられるので，標本標準偏差 S を用いて，m の (i) 95% 信頼区間と (ii) 99% 信頼区間を求めればいいんだね。**(2)** では m の 95% 信頼区間の幅は $2 \times 1.96\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ となること，**(3)** では 99% 信頼区間の幅が $2 \times 2.58\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ となることを利用して解けばいいんだね。頑張ろう！

解答＆解説

(1) 標本の大きさ $n = 256 (= 2^8)$，標本平均 $\overline{X} = 74$，標本標準偏差 $S = 12$ であり，n は十分に大きいので，

(i) 母平均 m の 95% 信頼区間は，

$$74 - 1.96 \cdot \frac{12}{\sqrt{256}} \leqq m \leqq 74 + 1.96 \cdot \frac{12}{\sqrt{256}}$$

$$\boxed{1.96 \times \frac{12}{2^4} = 1.96 \times \frac{12}{16} = 1.96 \times \frac{3}{4} = 1.47}$$

公式：
$$\overline{X} - 1.96\frac{S}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96\frac{S}{\sqrt{n}}$$

これから m の 95% 信頼区間の幅は，
$$\cancel{\overline{X}} + 1.96\frac{S}{\sqrt{n}} - \left(\cancel{\overline{X}} - 1.96\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$
$= 2 \times 1.96\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ となる。

$$74 - 1.47 \leqq m \leqq 74 + 1.47$$

$\therefore\ 72.53 \leqq m \leqq 75.47$ である。……………………………………(答)

(ⅱ) 母平均 m の 99% 信頼区間は,

$$74-2.58\cdot\underbrace{\frac{12}{\sqrt{256}}}_{2.58\times\frac{3}{4}=1.935}\leqq m\leqq 74+\underbrace{2.58\cdot\frac{12}{\sqrt{256}}}_{1.935}$$

公式：
$\overline{X}-2.58\frac{S}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+2.58\frac{S}{\sqrt{n}}$

これから m の 99% 信頼区間の幅は,
$\cancel{\overline{X}}+2.58\frac{S}{\sqrt{n}}-\left(\cancel{\overline{X}}-2.58\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$
$=2\times2.58\frac{S}{\sqrt{n}}$ となる。

$$74-1.935\leqq m\leqq 74+1.935$$

$\therefore\ 72.07\leqq m\leqq 75.94$ である。………(答)

(2) (1)の (ⅰ)より, m の 95% 信頼区間の幅は,

$2\times1.96\frac{S}{\sqrt{n}}=2\times1.96\cdot\frac{12}{\sqrt{256}}$ ……① である。

この幅を半分にする標本の大きさを n' とおくと, ①より,

$\cancel{2\times1.96}\times\frac{\cancel{12}}{\sqrt{n'}}=\frac{1}{2}\times\cancel{2\times1.96}\cdot\frac{\cancel{12}}{\sqrt{256}}$ となる。この逆数をとって,

$\sqrt{n'}=2\cdot\sqrt{256}$　　これを 2 乗して, $n'=4\times256=2^2\times2^8=2^{10}=1024$

$\therefore\ n'=1024$ である。 ………………………………………………(答)

(3) (1)の (ⅱ)より, $n=256$ のときの m の 99% 信頼区間の幅は,

$2\times2.58\frac{S}{\sqrt{n}}=2\times2.58\cdot\frac{12}{\sqrt{256}}$ ……② である。

②の幅を 2 以下にするための標本の大きさを n'' とおくと, ②より,

$\cancel{2}\times2.58\times\frac{12}{\sqrt{n''}}\leqq\cancel{2}$　　$\underbrace{12\times2.58}_{30.96}\leqq\sqrt{n''}$

この両辺を 2 乗すると,

$n''\geqq30.96^2=958.5216$ である。

$\therefore\ n''\geqq959$ より, m の 99% 信頼区間の幅を 2 以下にするためには,
少なくとも標本の大きさ n'' は 959 でなければならない。

…………(答)