連続型確率分布の期待値・分散・標準偏差 (Ⅰ)

絶対暗記問題 55　難易度 ★★　CHECK1　CHECK2　CHECK3

確率密度$f(x)$が, $f(x)=\begin{cases} ax^2 & (0 \leqq x \leqq \sqrt{3},\ a\text{は正の定数}) \\ 0 & (x<0,\ \sqrt{3}<x) \end{cases}$ で定義されている。

このとき, 次の各問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

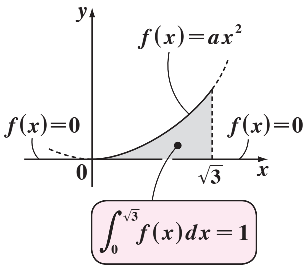
(2) 確率密度 $f(x)$ に従う確率変数 X の期待値 $m=E(X)$,
分散 $\sigma^2=V(X)$, 標準偏差 $\sigma=D(X)$ を求めよ。

(3) X を使って新たな確率変数 Y を $Y=4X-\sqrt{3}$ で定義するとき,
Y の期待値 $E(Y)$, 分散 $V(Y)$, 標準偏差 $D(Y)$ を求めよ。

ヒント！ 確率密度 $f(x)$ は, $x<0$ または $\sqrt{3}<x$ のとき 0 より, $0 \leqq x \leqq \sqrt{3}$ でのみ定義されていると考えればいい。よって, (1)では, $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx=1$ (全確率) から, a の値を求めよう。(2)では, 定義式に従って, $E(X)$, $V(X)$, $D(X)$ を求めればいい。(3)では, $Y=4X-\sqrt{3}$ より, $E(Y)=4E(X)-\sqrt{3}$, $V(Y)=4^2V(X)$, $D(Y)=\sqrt{V(Y)}$ となるんだね。正確に迅速に計算できるように練習しよう。

解答&解説

確率密度 $f(x)=\begin{cases} ax^2 & (0 \leqq x \leqq \sqrt{3}) \\ 0 & (x<0,\ \sqrt{3}<x) \end{cases}$



(1) 確率密度の性質より,

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}_{\cancel{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx}+\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx+\cancel{\int_{\sqrt{3}}^{\infty} f(x)dx}} = 1 \quad (\text{全確率}) \quad \text{よって,}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx}_{0} \quad \underbrace{\int_{\sqrt{3}}^{\infty} f(x)dx}_{0}$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} ax^2dx = a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{a}{3}(3\sqrt{3}-0) = \boxed{\sqrt{3}a=1} \quad (\text{全確率})$$

$\therefore a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。 ……………………………………(答)

(2) $f(x)$ に従う確率変数 X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $D(X)$ は，

$$m=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^{\sqrt{3}}x\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}x^2dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}}x^3dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{4\sqrt{3}}\{(\sqrt{3})^4\cancel{-0}\}=\frac{9}{4\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$ ……………(答)

$$\sigma^2=V(X)=E(X^2)-\{\underbrace{E(X)}_{\frac{3\sqrt{3}}{4}}\}^2=\int_0^{\sqrt{3}}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}x^2dx-\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\sqrt{3}}-\frac{27}{16}=\frac{\overbrace{(\sqrt{3})^5}^{9\sqrt{3}}}{5\sqrt{3}}-\frac{27}{16}=\frac{9}{5}-\frac{27}{16}$$

$$=\frac{9\times16-27\times5}{80}=\frac{144-135}{80}=\frac{9}{80}$$ ……………………………(答)

$$\sigma=D(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{80}}=\frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{4^2\times5}}=\frac{3}{4\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{20}$$ ……………………(答)

(3) X を使って定義された確率変数 $Y=4X-\sqrt{3}$ の期待値 $E(Y)$，分散 $V(Y)$，標準偏差 $D(Y)$ を求めると，

$$E(Y)=E(4X-\sqrt{3})=4\underbrace{E(X)}_{\frac{3\sqrt{3}}{4}}-\sqrt{3}$$

公式：
$E(aX+b)=aE(X)+b$

$$=\cancel{4}\times\frac{3\sqrt{3}}{\cancel{4}}-\sqrt{3}=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$ ………………………………(答)

$$V(Y)=V(4X-\sqrt{3})=4^2\underbrace{V(X)}_{\frac{9}{80}}$$

公式：
$V(aX+b)=a^2V(X)$

$$=16\times\frac{9}{80}=\frac{9}{5}$$ ……………………………………………(答)

$$D(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$ ………………………………(答)