● 対称形の連立漸化式は楽に解ける！

次に，2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の連立の漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=ra_n+sb_n \qquad (p,\ q,\ r,\ s：\text{定数})(n=1,2,3\cdots) \end{cases}$$

の解法について解説しよう。この連立の漸化式の中でも，

$$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \quad \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=qa_n+pb_n \quad \cdots\cdots② \end{cases} \qquad (p,\ q：\text{定数})(n=1,2,3\cdots)$$

対称形の連立漸化式

のように，①と②の右辺の係数がたすき状に p と p，q と q が等しいときこれを，対称形(たいしょうけい)の連立漸化式という。この場合，①と②をバサッとたす（①＋②），およびバサッと引く（①－②）を実行すれば，2 つの等比関数列型漸化式 $(F(n+1)=rF(n))$ の形が現れるので，簡単に解くことができるんだね。

では，次の例題で，実際にこの対称形の連立漸化式を解いてみよう。

◆例題 8◆

次の連立漸化式を解いて，一般項 a_n と b_n を求めよ。

$a_1=5,\ b_1=-2$

$$\begin{cases} a_{n+1}=5a_n-2b_n \quad \cdots\cdots\cdots ⓐ \\ b_{n+1}=-2a_n+5b_n \quad \cdots\cdots\cdots ⓑ \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

ⓐとⓑは，対称形の連立漸化式なので，

ⓐ＋ⓑより　$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$ ……ⓒ

$[\ F(n+1)=3\cdot F(n)\ ]$

ⓐ－ⓑより　$a_{n+1}-b_{n+1}=7(a_n-b_n)$ ……ⓓ

$[\ G(n+1)=7\cdot G(n)\ ]$

ⓐ＋ⓑと，ⓐ－ⓑから，2 つの等比関数列型の漸化式が導けたんだね。後は，アッという間に変形していこう！

よって，

ⓒより　$a_n+b_n=(\overset{5}{a_1}+\overset{-2}{b_1})\cdot 3^{n-1}=3^n$

$[\ F(n)=F(1)\cdot 3^{n-1}]$

ⓓより　$a_n-b_n=(\overset{5}{a_1}-\overset{-2}{b_1})\cdot 7^{n-1}=7^n$

$[\ G(n)=G(1)\cdot 7^{n-1}]$

アッ！

アッ！

$a_1=5,\ b_1=-2$ を代入した！

よって，$\begin{cases} a_n+b_n=3^n & \cdots\cdots ⓔ \\ a_n-b_n=7^n & \cdots\cdots ⓕ \end{cases}$ となる。これから，

$\dfrac{ⓔ+ⓕ}{2}$より一般項 $a_n=\dfrac{1}{2}(3^n+7^n)$ $(n=1,2,3\cdots)$ となるし …………(答)

$\dfrac{ⓔ-ⓕ}{2}$より一般項 $b_n=\dfrac{1}{2}(3^n-7^n)$ $(n=1,2,3\cdots)$ となる。 …………(答)

本当に，何のストレスもなく，アッという間に解けただろう？エッ！思ったよりずっと簡単だって!? いいねえ。その調子だ！

この対称形の連立漸化式の問題は，絶対暗記問題 **41(P121)** でも出題しているので，またサクサク解いてみよう！

● 非対称形の連立漸化式の解法にもチャレンジしよう！

では次，対称形ではない一般の非対称形の連立漸化式の解法パターンについて解説しよう。今回は，対称形のように簡単ではないんだけれど，でも，2つの等比関数列型の漸化式 $(F(n+1)=r\cdot F(n))$ の形に持ち込んで解くことに変わりはないんだよ。

それでは，次の例題で実際に非対称形の連立漸化式を解いてみることにしよう。

◆例題9◆

次の連立漸化式を解いて，一般項 a_n と b_n を求めよ。

$a_1=8,\ \ b_1=2$

$$\begin{cases} a_{n+1}=\ \ \ \ a_n-8b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=-2a_n+b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

今回は，対称形ではないので，
①＋②を実行しても，$a_{n+1}+b_{n+1}=-a_n-7b_n$ となるし，
①－②を実行しても，$a_{n+1}-b_{n+1}=3a_n-9b_n$ となって，いずれも
等比関数列型漸化式 $F(n+1)=rF(n)$ の形にはならないんだね。
したがってここで，2つの定数係数 α,β を用いて，等比関数列型の漸化式
$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ $[F(n+1)=\beta F(n)]$ となるように持ち込もう！

$a_1 = 8,\ \ b_1 = 2$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 8b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ b_{n+1} = -2a_n + b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

①，②より，2つの定数係数 $\alpha,\ \beta$ を用いて，次式が成り立つものとする。

$$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$[\ F(n+1) = \beta \cdot F(n)\ ]$$

$F(n) = a_n + \alpha b_n$
とおくと，
$F(n+1) = a_{n+1} + \alpha b_{n+1}$
となるからね。

$F(n+1) = \beta F(n)$ の等比関数列型の漸化式となるように，自分で設計し，①，②を使って，2つの係数 $\alpha,\ \beta$ を決定すれば，後は，アッという間に解けるんだね。頑張ろう！

①，②を，③の左辺に代入して，まとめると

$$a_n - 8b_n + \alpha(-2a_n + b_n) = \beta a_n + \alpha\beta b_n$$

$a_n - 2\alpha a_n - 8b_n + \alpha b_n$
$= (1 - 2\alpha)a_n + (\alpha - 8)b_n$

$$(1 - 2\alpha)a_n + (\alpha - 8)b_n = \beta a_n + \alpha\beta b_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③'$$

③′は，すべての自然数 n に対して，恒等的に成り立つので，a_n と b_n の各係数を比較して，

$$\begin{cases} 1 - 2\alpha = \beta & \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ \alpha - 8 = \alpha\beta & \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

これから，2つの係数 $\alpha,\ \beta$ の値が2組求まるね！

④を⑤に代入して，β を消去すると，

$$\alpha - 8 = \alpha(1 - 2\alpha) \qquad \cancel{\alpha} - 8 = \cancel{\alpha} - 2\alpha^2 \qquad \alpha^2 = 4$$

$\therefore\ \alpha = 2$ または -2

$$\begin{cases} (\text{i})\ \alpha = 2 \text{ のとき，④より} \quad \beta = 1 - 2 \times 2 = -3 \\ (\text{ii})\ \alpha = -2 \text{ のとき，④より} \quad \beta = 1 - 2 \times (-2) = 5 \end{cases}$$

(i)，(ii)の結果を③に代入すると，

$$\begin{cases} a_{n+1}+2b_{n+1}=-3(a_n+2b_n) \\ [\ F(n+1) \ = -3\cdot F(n)\ ] \\ a_{n+1}-2b_{n+1}=5(a_n-2b_n) \\ [\ G(n+1) \ = 5\cdot G(n)\ ] \end{cases}$$

アッ！

等比関数列型の漸化式が2つ導けたので後はアッという間に変形して
$F(n)=F(1)\cdot(-3)^{n-1}$
$G(n)=G(1)\cdot 5^{n-1}$
を導けばいいんだね。

よって,

アッという間！

$$\begin{cases} a_n+2b_n=(\overset{8}{a_1}+2\overset{2}{b_1})\cdot(-3)^{n-1} \\ [\ F(n) \ = \ F(1) \ \cdot(-3)^{n-1}] \\ a_n-2b_n=(\overset{8}{a_1}-2\overset{2}{b_1})\cdot 5^{n-1} \\ [\ G(n) \ = \ G(1) \ \cdot 5^{n-1}] \end{cases}$$

よって，$a_1=8$ と $b_1=2$ を代入すると

$$\begin{cases} a_n+2b_n=12\cdot(-3)^{n-1} & \cdots\cdots⑥ \\ a_n-2b_n=4\cdot 5^{n-1} & \cdots\cdots⑦ \end{cases}$$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ となる。

⑥＋⑦より，$2a_n=12\cdot(-3)^{n-1}+4\cdot 5^{n-1}$

∴一般項 $a_n=6\cdot(-3)^{n-1}+2\cdot 5^{n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ となる。
………(答)

⑥－⑦より，$4b_n=12\cdot(-3)^{n-1}-4\cdot 5^{n-1}$

∴一般項 $b_n=3\cdot(-3)^{n-1}-5^{n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ となる。
………(答)

今回は，2つの定数係数 α と β を用いて，等比関数列型の漸化式を予め作り，この係数 α と β を求めるのに手間がかかったんだけれど，でも一旦2つの等比関数列型漸化式を導けたなら，後は一気に解いていくことができて面白かったはずだ。エッ！まるで高速道路を車で走ってる気分だって!? そうだね，この等比関数列型漸化式による解法パターンは，高速解法パターンと呼んでもいいかもしれないね。みんな，是非マスターしてくれ！