$c_n - 5 = (c_1 - 5) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ と，アッという間に変形するんだね。

$\left[F(n) = F(1) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \right]$

後は，これに $c_1 = 1$ を代入して，一般項を求めると，

$$c_n = (1-5) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 5$$

$\therefore$ 一般項 $c_n = -4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 5 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となる。

これから，求める数列 $\{c_n\}$ の極限は，

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left\{-4 \cdot \underbrace{\boxed{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}}_{\to 0} + 5\right\}$$

$= -4 \times 0 + 5 = 5$ となって，答えだ！ 面白かった？

それでは，少しレベルは上がるけれど，次の練習問題をやってみよう。

練習問題 56	$a_{n+1} = pa_n + q$ の極限の応用	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = \frac{1}{2}$，$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+3a_n}$ ………① $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定義されるとき，次の各問いに答えよ。

(1) $a_n > 0$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であることを，数学的帰納法により示せ。

(2) ①の両辺の逆数をとり，$b_n = \frac{1}{a_n}$ とおいて，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を作り，これを解いて，一般項 b_n を求めよ。

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

①の逆数をとって，$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1+3a_n}{2a_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{3}{2}$ となるので，$b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと，$b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{3}{2}$ となって，$b_{n+1} = pb_n + q$ の形の漸化式になるんだね。

$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1+3a_n}$ ………① $(n=1, 2, 3, \cdots)$ について，

(1) $n=1, 2, 3, \cdots$ のとき，$a_n>0$ ……(*) が成り立つことを数学的帰納法により示す。

(i) $n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{1}{2}>0$

∴ (*) は成り立つ。

(ii) $n=k$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき，

$a_k>0$ が成り立つと仮定して，

$n=k+1$ のときについて調べる。

①の n に k を代入して，

$$a_{k+1}=\frac{2\overset{\oplus}{a_k}}{1+3\underset{\oplus}{a_k}}>0 \quad (\because a_k>0)$$

∴ $n=k+1$ のときも (*) は成り立つ。

以上 (i)(ii) より，すべての自然数 n に対して，

$a_n>0$ ……(*) は成り立つことが分かったんだね。

数学的帰納法
(i) $n=1$ のとき，
$a_1>0$ より，
成り立つ。
(ii) $n=k$ のとき，
$a_k>0$ が成り立つと仮定して，
$n=k+1$ のとき，
$a_{k+1}>0$ を示す。

(2) $a_n>0$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ より，①の両辺の逆数をとっても，分母は 0 にはならない。

よって，$\underbrace{\dfrac{1}{a_{n+1}}}_{b_{n+1}}=\dfrac{1+3a_n}{2a_n}=\dfrac{1}{2a_n}+\dfrac{3\cancel{a_n}}{2\cancel{a_n}}=\dfrac{1}{2}\cdot\underbrace{\dfrac{1}{a_n}}_{b_n}+\dfrac{3}{2}$ となる。

ここで，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}$，また，$b_1=\dfrac{1}{a_1}=2$

$\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

以上より，数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される。

$b_1=2$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{3}{2}$ ………② $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$b_{n+1}=pb_n+q$
の形の漸化式

②の特性方程式は，

$x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ なので，これを解いて，

$\dfrac{1}{2}x=\dfrac{3}{2}$ ∴ $x=\dfrac{3}{\cancel{2}}\times\cancel{2}=3$

これから，②は
$b_{n+1}-3=\dfrac{1}{2}(b_n-3)$ となる。

よって，②は，$b_{n+1}-3=\frac{1}{2}(b_n-3)$　$\left[F(n+1)=\frac{1}{2}F(n)\right]$

$\therefore\ b_n-3=(\underbrace{b_1}_{2}-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　$\left[\ F(n)\ =F(1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

これに，$b_1=2$ を代入して，求める $\{b_n\}$ の一般項 b_n は，

$b_n=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ………③　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となるんだね。

(3) $b_n=\frac{1}{a_n}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ……③ より，$a_n=\dfrac{1}{3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

よって，求める極限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ は，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-\underbrace{\boxed{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}}_{\to 0}}=\frac{1}{3}$$

となって，答えだ！ 大丈夫だった？

どう？　等比関数列型の漸化式の解法の威力が十分に分かっただろう？ ン？　でも，もっと他の漸化式にも使えないのかって？　この解法パターンは実は様々な漸化式の解法に利用できる。

それでは，ここでもう1つ，対称形(たいしょうけい)の連立の漸化式の解法についても解説しておこう。

● 対称形の連立の漸化式にもチャレンジしてみよう！

連立方程式では，2つの未知数 x と y を求めたように，連立の漸化式では，2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の関係式になっているんだね。エッ！　急にハードルが高くなって，難しそうだって!?　確かに，レベルは少し上がるけれど，この解法も，等比関数列型の漸化式の考え方を使えば，シンプルに解けるので，そんなに心配する必要はないよ。

それではここで，対称形(たいしょうけい)の連立の漸化式と極限の問題を，例題を使って，具体的に紹介しよう。