$c_n-5=(c_1-5)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$　と，アッという間に変形するんだね。

$\left[F(n)=\ \ F(1)\ \ \cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right]$

後は，これに $c_1=1$ を代入して，一般項を求めると，

$$c_n=(1-5)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}+5$$

$\therefore$ 一般項 $c_n=-4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}+5\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　となる。

これから，求める数列 $\{c_n\}$ の極限は，

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-4\cdot\overset{0}{\boxed{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}}+5\right\}$$

$$=-4\times0+5=5$$　となって，答えだ！

どう？　等比関数列型の漸化式の解法の威力が十分に分かっただろう？ ン？　でも，もっと他の漸化式にも使えないのかって？　この解法パターンは実は様々な漸化式の解法に利用できる。

それでは，ここでもう1つ，対称形（たいしょうけい）の連立の漸化式の解法についても解説しておこう。

● 対称形の連立の漸化式にもチャレンジしてみよう！

連立方程式では，2つの未知数 x と y を求めたように，連立の漸化式では，2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の関係式になっているんだね。エッ！　急にハードルが高くなって，難しそうだって!?　確かに，レベルは少し上がるけれど，この解法も，等比関数列型の漸化式の考え方を使えば，シンプルに解けるので，そんなに心配する必要はないよ。

それではここで，対称形（たいしょうけい）の連立の漸化式と極限の問題を，例題を使って，具体的に紹介しよう。

2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が次の連立の漸化式で定義されるとき，この2つの数列の一般項 a_n と b_n を求め，極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めてみよう。

$a_1=4,\ b_1=2$

$$\begin{cases} a_{n+1}=4a_n+2b_n & \cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=2a_n+4b_n & \cdots\cdots ② \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

・$n=1$ のとき，①より，$a_2=4\underbrace{a_1}_{4}+2\underbrace{b_1}_{2}=16+4=20$

②より，$b_2=2\underbrace{a_1}_{4}+4\underbrace{b_1}_{2}=8+8=16$

・$n=2$ のとき，①より，$a_3=4\underbrace{a_2}_{20}+2\underbrace{b_2}_{16}=80+32=112$

②より，$b_3=2\underbrace{a_2}_{20}+4\underbrace{b_2}_{16}=40+64=104$

……………………………………………………………………

このように，連立の漸化式でも，順次，$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots$ の値を求めていけるんだね。そして，この連立の漸化式の中でも，①の a_n の係数と②の b_n の係数が4で等しく，かつ①の b_n の係数と②の a_n の係数が2で等しいもの，

すなわち $\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=qa_n+pb_n \end{cases}$ ← 右辺の係数が，対角線上に p 同士，q 同士等しいもの　の形の

ものを特に，**対称形の連立漸化式**というんだね。

そして，この対称形の連立漸化式であれば，一般項を求めることは，簡単なんだよ。すなわち，①＋②と①－②を求めれば，すぐに等比関数列型の漸化式にもち込めるからなんだね。早速やってみよう。

①＋②より　$a_{n+1}+b_{n+1}=6a_n+6b_n$

$a_{n+1}+b_{n+1}=6(a_n+b_n)$ ← $F(n)=a_n+b_n$ とおくと，$F(n+1)$ は $F(n)$ の n の代わりに $n+1$ を代入したものなので $F(n+1)=a_{n+1}+b_{n+1}$ となるんだね。

$[\ F(n+1)=6\cdot F(n)\ ]$

①－②より　$a_{n+1}-b_{n+1}=2a_n-2b_n$

$a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$ ← $G(n)=a_n-b_n$ とおくと，$G(n+1)$ は $G(n)$ の n の代わりに $n+1$ を代入したものなので $G(n+1)=a_{n+1}-b_{n+1}$ となるんだね。

$[\ G(n+1)=2\cdot G(n)\ ]$

①＋②と①－②から，2つの等比関数列型の漸化式が出てきたので，後はアッという間に解くことができるんだね。

$$a_1=4,\ b_1=2$$
$$\begin{cases} a_{n+1}=4a_n+2b_n & \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=2a_n+4b_n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n+1}+b_{n+1}=6(a_n+b_n) \\ [\ F(n+1)=6\cdot F(n)\ ] \\ a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n) \\ [\ G(n+1)=2\cdot G(n)\ ] \end{cases}$$

アッと

$$\begin{cases} a_n+b_n=(\overset{4}{a_1}+\overset{2}{b_1})\cdot 6^{n-1} \\ [\ F(n)=\quad F(1)\quad \cdot 6^{n-1}\ ] \\ a_n-b_n=(\overset{4}{a_1}-\overset{2}{b_1})\cdot 2^{n-1} \\ [\ G(n)=\quad G(1)\quad \cdot 2^{n-1}\ ] \end{cases}$$

いう間！

よって，$a_1=4$，$b_1=2$を代入すると，

$$\begin{cases} a_n+b_n=6\cdot 6^{n-1}=6^n & \cdots\cdots③ \\ a_n-b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

$\therefore\ \frac{1}{2}$(③＋④)より，$a_n=\frac{1}{2}(6^n+2^n)$

$\frac{1}{2}$(③－④)より，$b_n=\frac{1}{2}(6^n-2^n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

となって，一般項 a_nと b_nが求まる。

よって，求める極限は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\frac{1}{2}}(6^n-2^n)}{\cancel{\frac{1}{2}}(6^n+2^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6^n-2^n}{6^n+2^n}\quad \left[=\frac{\infty-\infty}{\infty+\infty}\text{の不定形}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2^n}{6^n}}{1+\frac{2^n}{6^n}}$$

分子・分母を6^nで割った

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\overbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}^{0}}{1+\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{0}}=\frac{1}{1}=1\quad\text{となる。}$$

どう？　初め難しく思えた対称形の連立の漸化式と極限の問題も，意外とアッサリ解けて驚いたって !?　そうだね，数学って体系立てて学習すれば実力を次々に伸ばしていくことも可能なんだね。

ではもう1題，例題を解いておこう。

2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次のように定義されるとき，一般項 a_n と b_n を求めて，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めてみよう。

$a_1=\frac{2}{3}$，$b_1=\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n & \cdots\cdots ㋐ \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n & \cdots\cdots ㋑ \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

㋐，㋑の右辺の係数が，対角線上に等しいので，これは対称形の連立漸化式だ。

㋐＋㋑より，$a_{n+1}+b_{n+1}=1\cdot a_n+1\cdot b_n$

$\therefore\ a_{n+1}+b_{n+1}=1\cdot(a_n+b_n)$　　$[F(n+1)=1\cdot F(n)]$

㋐－㋑より，$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n-\frac{1}{3}b_n$

アッと

$\therefore\ a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n-b_n)$　　$\left[G(n+1)=\frac{1}{3}\cdot G(n)\right]$

これから，次のように変形できる。

$$\begin{cases} a_n+b_n=(\underset{}{\overset{\frac{2}{3}}{a_1}}+\overset{\frac{1}{3}}{b_1})\cdot 1^{n-1} \\ a_n-b_n=(\overset{\frac{2}{3}}{a_1}-\overset{\frac{1}{3}}{b_1})\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases}$$

いう間！

$[F(n)=F(1)\cdot 1^{n-1}]$

$\left[G(n)=G(1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$

以上の結果に $a_1=\frac{2}{3}$，$b_1=\frac{1}{3}$ を代入すると，

$$\begin{cases} a_n+b_n=1\cdot 1^{n-1}=1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㋒ \\ a_n-b_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n & \cdots\cdots ㋓ \end{cases}$$

となる。よって，

$\frac{㋒+㋓}{2}$ より，$a_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$\frac{㋒-㋓}{2}$ より，$b_n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$$\therefore \text{一般項 } a_n = \frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\},\ b_n = \frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が求まったので，それぞれの極限を求めると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{1+\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}\right\} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$ となるし，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{1-\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}\right\} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$ となって，答えだ！ 納得いった？

どう？　これで，$a_{n+1} = pa_n + q\ (p \fallingdotseq 1,\ q \fallingdotseq 0)$の形の漸化式から一般項$a_n$を求め，その極限を求める問題にも，また，対称形の連立漸化式
$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = qa_n + pb_n \end{cases}$ から一般項 a_nと b_nを求め，極限を求める問題にも自信がついただろう？

ここで使われた $F(n+1) = r\cdot F(n)$ から $F(n) = F(1)\cdot r^{n-1}$ へと変形する考え方は，実はもっとさまざまな漸化式を解く上でポイントとなる変形パターンなんだ。だから，これまでの内容をマスターできた人は，**「元気が出る数学 III」**や**「合格！ 数学 III」(マセマ)**で勉強して，さらに腕に磨きをかけていくといいよ。どんな漸化式でも解いて，その極限が求められるようになると，スバラシイからね。

以上で，**「初めから始める数学 III Part1 改訂 1」**の講義はすべて終了です。みんな，本当によく頑張ったね。でも，本格的な数学 III のテーマである“**微分**（びぶん）**・積分**（せきぶん）”は，**Part2** の講義で扱うから，まだまだ気を抜かずに最後まで，やり抜いてほしい。もちろん，マセマは，そんな頑張るキミ達の強い味方だからね。だから，次回は，**Part2** で会おうな！
それまで，みんな元気で…。またキミ達に会えることを楽しみにしてる。
さようなら。

マセマ代表　馬場 敬之（けいし）