割った余りを，アッという間に求めることができるんだね。

(ⅰ) $473 + 182 \equiv 3 + 2 \equiv 5 \equiv 0 \pmod{5}$ より

$473 + 182$ を 5 で割った余りは 0 である。

(ⅱ) $473 - 182 \equiv 3 - 2 \equiv 1 \pmod{5}$ より

$473 - 182$ を 5 で割った余りは 1 である。

(ⅲ) $473 \times 182 \equiv 3 \times 2 \equiv 6 \equiv 1 \pmod{5}$ より

473×182 を 5 で割った余りは 1 である。

(ⅳ) $473^5 \equiv 3^5 \equiv 3^3 \times 3^2 \pmod{5}$

ここで，$3^3 \equiv 27 \equiv 2 \pmod{5}$

$3^2 \equiv 9 \equiv 4 \pmod{5}$ より

$473^5 \equiv 2 \times 4 \equiv 8 \equiv 3 \pmod{5}$

よって，非常に大きな整数 473^5 を 5 で割った余りは 3 であることも簡単に導けるんだね。

どう？これで，合同式の利用法も理解できただろう？

さらに，この合同式は，整数の証明問題にも応用することができるんだね。典型的な問題を 2 つやっておこう。

(*ex*)「任意の正の整数 n について，n^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 のみである」ことを証明してみよう。

たとえば，$n = 6$ のとき，$n^2 = 36$ となるので，これを 3 で割ると割り切れて，余りは 0 だね。$n = 7$ のとき，$n^2 = 49$ より，これは $49 = 3 \times 16 + 1$ だから 3 で割ると余りは 1 となる。$n = 8$ のときは，$n^2 = 64 = 3 \times 21 + 1$ より，これを 3 で割ると余りは 1 となる。このように，どんな正の整数 n でも，これを 2 乗した n^2 を 3 で割ると，余りは 0 か 1 しかなく，余りが 2 となることはないんだね。このことを，合同式を使って証明してみよう。

すべての正の整数 n は，3 で割ると，余りが (ⅰ) 0 または (ⅱ) 1 または (ⅲ) 2 となる，3 通りの整数に分類できる。つまり，これを合同式で表すと，

(ⅰ) $n \equiv 0 \pmod{3}$ ← 具体的には $3, 6, 9, 12, 15, \cdots$ のこと

(ⅱ) $n \equiv 1 \pmod{3}$ ← 具体的には $1, 4, 7, 10, 13, \cdots$ のこと

(ⅲ) $n \equiv 2 \pmod{3}$ ← 具体的には $2, 5, 8, 11, 14, \cdots$ のこと

これで，すべての整数だ！

となるので，この 3 通りの n について，n^2 を 3 で割った余りを調べてみればいいんだね。

(ⅰ) $n \equiv 0 \pmod 3$ のとき，

$n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod 3$ より，n^2 を 3 で割った余りは $\underline{\underline{0}}$ である。

(ⅱ) $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，

$n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 3$ より，n^2 を 3 で割った余りは $\underline{\underline{1}}$ である。

(ⅲ) $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき，

$n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$ より，n^2 を 3 で割った余りは $\underline{\underline{1}}$ である。

以上 (ⅰ)(ⅱ)(ⅲ) より，「任意の正の整数 n について，n^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 のみである」ことが示せたんだね。面白かった？

それでは，もう 1 題，類似の証明問題を解いてみよう。

(*ex*)「任意の正の整数 n について，n^4 を 5 で割った余りは 0 または 1 のみである」ことを証明してみよう。

任意の正の整数 n を 5 で割ったとき，余りが (ⅰ) 0 または (ⅱ) 1 または (ⅲ) 2 または (ⅳ) 3 または (ⅴ) 4 となるので，今回はこの 5 通りに分類して，n^4 を 5 で割った余りを調べてみればいいんだね。

(ⅰ) $n \equiv 0 \pmod 5$ のとき， ← 具体的には $n = 5, 10, 15, 20, \cdots$ のこと

$n^4 \equiv 0^4 \equiv 0 \pmod 5$ より，n^4 を 5 で割った余りは $\underline{\underline{0}}$ である。

(ⅱ) $n \equiv 1 \pmod 5$ のとき， ← 具体的には $n = 1, 6, 11, 16, \cdots$ のこと

$n^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod 5$ より，n^4 を 5 で割った余りは $\underline{\underline{1}}$ である。

(ⅲ) $n \equiv 2 \pmod 5$ のとき， ← 具体的には $n = 2, 7, 12, 17, \cdots$ のこと

$n^4 \equiv 2^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod 5$ より，n^4 を 5 で割った余りは $\underline{\underline{1}}$ である。

(ⅳ) $n \equiv 3 \pmod 5$ のとき， ← 具体的には $n = 3, 8, 13, 18, \cdots$ のこと

$n^4 \equiv 3^4 \equiv (\underbrace{3^2}_{9 \equiv 4})^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 1 \pmod 5$ より，

n^4 を 5 で割った余りは $\underline{\underline{1}}$ である。

(v) $n \equiv 4 \pmod{5}$ のとき，←具体的には $n = 4, 9, 14, 19, \cdots$ のこと

$n^4 \equiv 4^4 \equiv (\underbrace{4^2}_{16 \equiv 1})^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{5}$ より，

n^4 を 5 で割った余りは 1 である。

以上 (i)(ii)(iii)(iv)(v) より，「任意の正の整数 n について，n^4 を 5 で割った余りは 0 または 1 のみである」ことが示せたんだね。

これから，どんな正の整数 n であっても n^4 を 5 で割ったとき，その余りは必ず 0 または 1 となるので，余りが 2 や 3 や 4 となることはあり得ないことが分かったんだね。

以上より，

「どんな正の整数 n でも，n^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 のみである」

こと，および，

「どんな正の整数 n でも，n^4 を 5 で割った余りは 0 または 1 のみである」

ことは，合同式による証明法も含めてシッカリ頭に入れておこう！

以上で，これまで 3 回に渡って講義してきた“**整数の性質**”の解説はすべて終了です！ みんな，よく頑張ったね。

これまでの講義の内容をシッカリマスターすれば，中間・期末試験も乗り切れるだろうし，さらに受験基礎力まで身に付けることが出来るんだよ。

だから，次回の講義まで，これまで学習した内容を自分で納得がいくまで，繰り返し復習しておいてほしい。

次回からは，新しいテーマ“**図形の性質**”の講義に入ろう。それでは，みんな元気でな。また会おう…！