次，事象 A の場合の数 $n(A)$ は，6 個の赤球から 2 個を選び出すので，

$n(A)={}_6C_2=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=15$ 通りとなる。

$\therefore P_3=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$ となる。どう？ 面白い結果になったね。

エッ，何が面白いか分からんって？ (2) と (3) のそれぞれの確率 P_2 と P_3 が同じ $\frac{1}{3}$ になっているだろう。これが注目ポイントなんだ。じゃ，何故，同じになるか，その理由を説明しておこう。(2) では，1 回目に球を取り出して，それを元に戻さずにもう 1 回球を取り出したとき，取り出された 2 つの球が共に赤球となる確率が，$P_2=\frac{1}{3}$ と計算できた。これに対して，(3) では1 度にガサッと 2 個の球を取り出し，その 2 個の球がいずれも赤球となる確率として，$P_3=\frac{1}{3}$ が求まったんだね。では，何故この 2 つが同じになるのか？ ボク達の感覚では，(2) は 1 回取り出して，次に 2 回目を取り出すまでに一定の時間差があるように思えるね。でも，数学ではこの時間差を考慮に入れることなく計算していることになるんだ。たとえば，動きの緩慢な老人が，1 個を取り出した後，それを戻さずにもう 1 個取り出しても，スパイダーマンのように目にも止まらぬ速さで動ける人が同様のことを行なっても，確率の計算には影響しないということなんだ。そして，このスパイダーマンの速さで，1 個を取り出し，それを元に戻さずにもう 1 個取り出すということは，瞬間的に 2 個の球を取り出すのと同じなんだね。だから，確率 P_2 と確率 P_3 は等しくなるんだね。納得いった？

それでは，この時間と確率の面白い関係について，さらに解説しておこう。これは，典型的な条件付き確率の問題で，試験でもよく出題されるテーマなんだけれど，確率と時間の関係について考えさせられる問題なんだね。具体例を使って，これから教えよう。

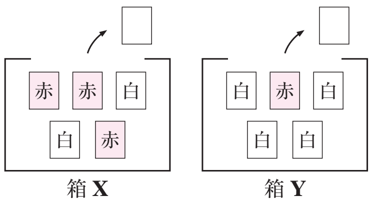
● 典型的な条件付き確率の問題を解いてみよう！

後で，ちょっと頭を悩ませることになるかもしれないけれど，次の典型的な条件付き確率の問題を解いてみよう。

練習問題 24	条件付き確率	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

赤いカードが 3 枚と白いカードが 2 枚入った箱 X と，赤いカードが 1 枚と白いカードが 4 枚入った箱 Y がある。まず，無作為に箱 X か箱 Y を選び，その箱の中から 1 枚のカードを取り出した結果，そのカードは赤いカードであった。このとき，選んだ箱が X であった確率を求めよ。

これは，2 つの事象 A，B を，A：赤いカードを取り出す，B：箱 X を選ぶ，とおいて考えると，見通しが立つと思う。つまり，この問題では，A が起こったという条件の下で，B が起こる条件付き確率 $P_A(B)$ を求めなさいと，言っているんだね。これは，典型的な条件付き確率の問題だよ。



右図に示すように，箱 X には赤いカードが 3 枚と白いカードが 2 枚入っていて，箱 Y には赤いカードが 1 枚と白いカードが 4 枚入っているんだね。

ここでまず，箱 X か箱 Y を無作為に選ぶと言っているわけだから，X を選ぶ確率も，Y を選ぶ確率も共に等しく $\frac{1}{2}$ ということになる。そして，選んだ箱からカードを 1 枚取り出して，そのカードが赤いカードだったと言っているんだね。

したがって，ここで 2 つの事象 A，B を次のようにおくことにしよう。

$$\begin{cases} \text{事象 } A\text{：取り出したカードが赤いカードである。} \\ \text{事象 } B\text{：箱 X を選ぶ。} \end{cases}$$

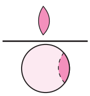
このように，2 つの事象 A，B をおくことにより，問題を解くための糸口が見えてきただろう。つまり，

取り出したカードが赤いカードであったという条件の下で，選んだ箱が X で

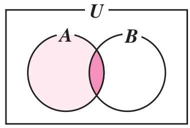
事象 A　　事象 B

あったという条件付き確率 $P_A(B)$ を求めればいいんだね。これは，公式より，

事象 A が起こったという条件の下で，事象 B の起こる確率

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$ [= ] ……①　これはイメージ

ベン図



となることは，大丈夫だね。

・ここで，事象 A，すなわち取り出した 1 枚のカードが赤いカードである確率 $P(A)$ は，(i) 箱 X を選んで，赤いカードを 1 枚取り出すか，または (ii) 箱 Y を選んで，赤いカードを 1 枚取り出すかのいずれかなので，これらの確率の和を求めればいいんだね。よって，

$$P(A)=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{(i)Xを選ぶ}}\times\underbrace{\frac{{}_3C_1}{{}_5C_1}}_{\text{5枚のカードの内3枚の赤いカードから1枚取り出す}}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{(ii)Yを選ぶ}}\times\underbrace{\frac{{}_1C_1}{{}_5C_1}}_{\text{5枚のカードの内1枚の赤いカードを取り出す}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{3+1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$ ……② となるね。

・次に，$P(A\cap B)$ は，箱 X を選んで，かつ 1 枚の赤いカードを取り出す確率なので，

$$P(A\cap B)=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Xを選ぶ}}\times\underbrace{\frac{{}_3C_1}{{}_5C_1}}_{\text{5枚のカードの内3枚の赤いカードから1枚取り出す}}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$ ………………③ となる。

よって，②，③を①に代入すると，条件付き確率 $P_A(B)$ は，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3\times5}{2\times10}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$$ となって，答えなんだね。

ン？でも，何か納得がいかない顔をしているね。その心を当ててみようか？問題文では「まず初めに箱 **X** か箱 **Y** かを無作為に選んだ後で，その箱から **1** 枚のカードを取り出して，それが赤いカードであった」と言っているわけだから，赤いカードを取り出した時点ではもう既に箱 **X** か箱 **Y** かのいずれかは選択されているはずなんだね。

したがって，**1** 枚の赤いカードを取り出した条件の下で，箱 **X** を選んだ条件付き確率を求めるということは，時間の流れの前後関係が逆転しているんじゃないか？って疑問が湧いてきてるんだろう？　キミの疑問はとても自然なことだと思うよ。

でも，数学的には，このような時間の前後関係は無視して，条件付き確率として，$P_A(B)$ を公式通り求めることができるんだね。そして，この解釈としては，**1** 枚の赤いカードが取り出されたとき，過去にさかのぼって箱 **X** が選ばれたであろう確率を推定し，それが $P_A(B)$ であると考えればいいんだね。これで疑問も解決できたかな？

それでは，練習問題と同じ条件で，条件付き確率 $P_{\overline{A}}(B)$ を，公式通り求めてみよう。これは，$\underbrace{\text{取り出した 1 枚のカードが白いカードであった}}_{\text{余事象}\overline{A}}$という条件の下で，$\underbrace{\text{選んだ箱が X であった}}_{\text{事象}B}$という，つまり，余事象 $\overline{A}$ が起こったという条件の下で，事象 B が起こる条件付き確率のことなんだね。
これも，公式通り求めると，次のようになる。

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} \quad \cdots\cdots ④$$

・まず，**1** 枚の白いカードを取り出す確率 $P(\overline{A})$ は，(i) 箱 **X** を選んで **1** 枚の白いカードを取り出すか，または (ii) 箱 **Y** を選んで，**1** 枚の白いカードを取り出すかのいずれかなので，これらの確率の和を求めればいいんだね。よって，

$$P(\overline{A}) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{(\text{i})\,X\text{を選ぶ}} \times \underbrace{\frac{{}_2C_1}{{}_5C_1}}_{\substack{5\text{枚のカードの内}2\text{枚の白}\\\text{いカードから}1\text{枚取り出す}}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{(\text{ii})\,Y\text{を選ぶ}} \times \underbrace{\frac{{}_4C_1}{{}_5C_1}}_{\substack{5\text{枚のカードの内}4\text{枚の白}\\\text{いカードから}1\text{枚取り出す}}}$$

これは，余事象の確率より，②から，
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$
としても求まるね。

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$ ……⑤ となるね。

・次に，$P(\overline{A} \cap B)$ は，箱 X を選んで，かつ 1 枚の白いカードを取り出す確率なので，

$$P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_1}{{}_5C_1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$ …………⑥ となる。

よって，⑤，⑥を④に代入すると，求める条件付き確率 $P_{\overline{A}}(B)$ は，

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{1}{3}$$ となるんだね。大丈夫だった？

このような条件付き確率の問題が出てきたら，時間的な前後関係は気にせずに，公式を利用して結果を出していけばいいんだね。

数学って，意味が分かるようになって，理解が深まると，ますます面白くなっていくものなんだね。それでは，今日の講義はこれで終了です。いろんな問題を解いたから，この後よく復習して，頭の中を整理しておくことだね。特に内容のある問題は 1 回で理解しようとするのではなく，何度も反復練習して，自分のものにしていってくれたらいいんだよ。

それじゃ，みんな，次回も元気で会おうな。さようなら……。