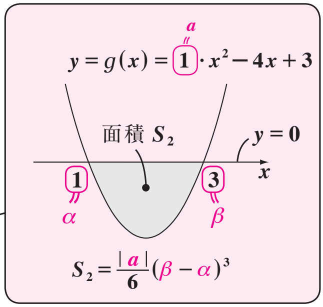
次，練習問題 70(2) (P258) の問題も見てみよう。これも，放物線 $y=g(x)=\underbrace{1}_{a}\cdot x^2-4x+3$ と，$\underbrace{\text{直線 } y=0}_{x\text{ 軸}}$ とで囲まれる図形の面積 S_2 を求める問題だった。

$y=g(x)$ と $y=0$ との交点の x 座標は，$\underbrace{1}_{\alpha}$ と $\underbrace{3}_{\beta}$

だったので，面積 S_2 を求めるのに必要な数値が $a=1$，$\alpha=1$，$\beta=3$ となるんだね。

よって，求める面積 S_2 は，



$$S_2=\frac{|\overset{1}{a}|}{6}(\underbrace{\beta}_{3}-\underbrace{\alpha}_{1})^3=\frac{|1|}{6}(3-1)^3$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}$$ となって，これも前に定積分で計算した結果と一致するだろう。どう？ 面積公式の威力が分かった？

それでは，次の練習問題で，さらに面積公式を利用してみよう。

練習問題 72	面積公式	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

放物線 C：$y=2x^2-4x$ と，直線 l：$y=2mx+1$ （m：定数）
がある。放物線 C と直線 l とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

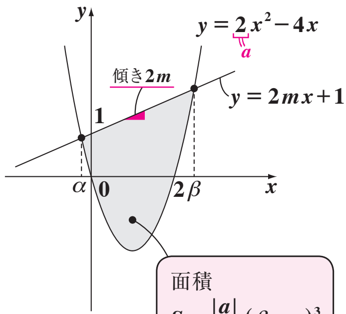
放物線 C：$y=\underbrace{2}_{a}x^2-4x$ と，直線 l：$y=2mx+1$ との 2 つの交点の x 座標 α, β ($\alpha<\beta$) を求めたら，放物線と直線とで囲まれる図形の面積 S を求める公式：$S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ を使えばいいんだね。この問題のように，2 交点の x 座標 α, β が，m の式で表されるような場合でも，面積公式を使えば，楽に面積を求めることができるんだよ。頑張ろう！

$$\begin{cases} y = \underset{a}{2}x^2 - 4x & \cdots\cdots\cdots ① \\ y = \underbrace{2m}_{\text{傾き}}x + \underbrace{1}_{y\text{切片}} & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

$y=2x(x-2)$ より，これは x 軸と $(0,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わる下に凸の放物線だね。

点 $(0,\ \underbrace{1}_{y\text{切片}})$ を通る傾き $2m$ の直線

とおく。①と②の交点の x 座標 α，β $(\alpha<\beta)$ を求めるために，①，②より y を消去して，



面積
$S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$
$=\dfrac{2}{6}(\beta-\alpha)^3$
$=\dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$

$$2x^2-4x=2mx+1$$

$$2x^2\underbrace{-4x-2mx}_{-2(m+2)x}-1=0$$

$$\underbrace{2}_{a}x^2\underbrace{-2(m+2)}_{2b'}x\underbrace{-1}_{c}=0$$

これを解いて，

$$x=\frac{m+2\pm\sqrt{\overbrace{(m+2)^2-2\cdot(-1)}^{m^2+4m+4+2}}}{2}$$

$$=\underbrace{\frac{m+2\pm\sqrt{m^2+4m+6}}{2}}_{\text{この小さい方が}\alpha\text{，大きい方が}\beta\text{ だね。}}$$

解の公式
$ax^2+2b'x+c=0$ の
解 $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

よって，①の放物線 C と，②の直線 l の交点の x 座標 α，β $(\alpha<\beta)$ は

$$\alpha=\frac{m+2-\sqrt{m^2+4m+6}}{2},\qquad \beta=\frac{m+2+\sqrt{m^2+4m+6}}{2}\qquad \text{である。}$$

よって，求める放物線 C と直線 l とで囲まれる図形の面積 S を，面積公式を使って求めると，

$$S=\frac{|\overset{2}{a}|}{6}(\underbrace{\beta}_{\frac{m+2+\sqrt{m^2+4m+6}}{2}}-\underbrace{\alpha}_{\frac{m+2-\sqrt{m^2+4m+6}}{2}})^3 \quad \text{より，}$$

$$S=\underbrace{\frac{|2|}{6}}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\cancel{m+2}+\sqrt{m^2+4m+6}}{2}-\frac{\cancel{m+2}-\sqrt{m^2+4m+6}}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}\Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt{m^2+4m+6}}{2}+\frac{\sqrt{m^2+4m+6}}{2}}_{\sqrt{m^2+4m+6}}\Bigg)^3$$

$\dfrac{\sqrt{A}}{2}+\dfrac{\sqrt{A}}{2}=\sqrt{A}$ だからね。

$$=\frac{1}{3}\Big(\underbrace{\sqrt{m^2+4m+6}}_{(m^2+4m+6)^{\frac{1}{2}}}\Big)^3$$

$\therefore\ S=\dfrac{1}{3}(m^2+4m+6)^{\frac{3}{2}}$ となって，答えが求まる。

$A^{\frac{3}{2}}=A^1\cdot A^{\frac{1}{2}}=A\sqrt{A}$ より，この面積 S は，

$S=\dfrac{1}{3}(m^2+4m+6)\sqrt{m^2+4m+6}$ と表しても，もちろんいいよ。

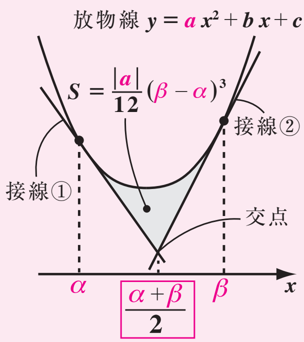
どう？これで，面積公式の使い方にもずい分慣れただろう？

それでは，重要な面積公式をもう **1** つ紹介しておこう。放物線と **2** 本の接線とで囲まれる図形の面積は次の公式でアッという間に求められるんだね。これも重要公式なので，シッカリ頭に入れよう！

面積公式（Ⅱ）

$y=ax^2+bx+c$ とその **2** つの接線①，②とで囲まれる図形の面積 S は，放物線と **2** 接線の接点の x 座標 α，$\beta(\alpha<\beta)$ と，x^2 の係数 a の **3** つだけで，次のように簡単に計算できる。

$$\text{面積 } S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$



この面積公式についても，次の練習問題で早速練習しておこう。

練習問題 73	面積公式	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

放物線 $C: y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$ と，点 $A(1,\ -4)$ がある。
(1) 点 A を通り，放物線 C に接する 2 本の接線 L_1 と L_2 の方程式を求めよ。
(2) 放物線 C と 2 本の接線 L_1，L_2 とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(1) は，放物線 C 上にない点 A から放物線 C に引く接線の方程式を求める問題なんだね。この問題の解法の手順は，次の 3 ステップだよ。

(i) 放物線 $C: y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式
$y=f'(t)\cdot(x-t)+f(t)$ …………① を立てる。

(ii) ①は，点 $A(1,\ -4)$ を通るので，この座標を①に代入して，t の 2 次方程式を作る。

(iii) t の 2 次方程式を解いて，t の値を①に代入して，接線の方程式を求める。

ちょっとメンドウだけれど，頑張ろう。

(2) は，放物線と 2 つの接線とで囲まれる図形の面積を求める問題なので，面積公式 $S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$ を使えば，簡単に答えを導けるんだね。

(1) 放物線 $C: y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$ を x で微分して，

$f(1)=\frac{1}{2}\cdot1^2=\frac{1}{2}$ となるので，点 $A(1,\ -4)$ は放物線 C 上の点ではないね。

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=\frac{1}{2}\cdot2x=x$$

(i) よって，放物線 C 上の点 $\left(t,\ \underbrace{\frac{1}{2}t^2}_{f(t)}\right)$ における接線の方程式は

$$y=t\cdot(x-t)+\frac{1}{2}t^2 \qquad y=t\cdot x\underbrace{-t^2+\frac{1}{2}t^2}_{-\frac{1}{2}t^2}$$

[$y=f'(t)\cdot(x-t)+f(t)$]

$$y=t\cdot x-\frac{1}{2}t^2 \quad \cdots\cdots① \text{ となる。}$$

1st. ステップ
まず，C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の式を立てる。