$47-2(\underbrace{164-3\times47}_{23})=1$ ← この左辺を $164\times\bigcirc+47\times\triangle$ の形にする。

$164\times(-2)+47\times7=1$ ……④　となる

これは，①の x に -2 を，y に 7 を代入した形の式だ。
これから，①の 1 組の解 $(x,\ y)$ が，$(x,\ y)=(-2,\ 7)$ であることが分かったんだね。

①と④を併記すると，

$164x+47y=1$ ……………①

$164\cdot(-2)+47\cdot7=1$ ……④　となる。

①−④より，

$164(x+2)+47(y-7)=0$

よって，$164\cdot\underbrace{(x+2)}_{47\text{ の倍数}}=47\underbrace{(-y+7)}_{164\text{ の倍数}}$ ……⑤　となる。

ここで，$x+2$ と $-y+7$ は共に整数であり，かつ 164 と 47 は互いに素より，$x+2$ は 47 の倍数になる。よって，整数 n を用いて，

$x+2=47n$ …⑥　$\therefore\ x=47n-2$ …⑥′　(n：整数)

となる。⑥を⑤に代入して，

$164\cdot\cancel{47}n=-\cancel{47}(y-7)$　$164n=-y+7$

$\therefore\ y=-164n+7$ …⑦　となる。

以上⑥′，⑦より，①の不定方程式の整数解は，

$(x,\ y)=(47n-2,\ -164n+7)$　(n：整数)　となるんだね。納得いった？

具体的には，……，$(-49,\ 171)$，$(-2,\ 7)$，$(45,\ -157)$，$(92,\ -321)$，……のこと

$n=-1$ のとき　$n=0$ のとき　$n=1$ のとき　$n=2$ のとき

では次，$ax+by=n$ 型の応用問題で，a と b は互いに素な整数だけれど，n が 1 以外の整数である場合についても解説しておこう。ン？難しそうだって？確かに，2 元 1 次不定方程式の最終段階に入るわけだからね。でも，これで，このタイプの問題はすべて解けるようになるわけだから，元気を出して，頑張ろう！　どうせ，分かりやすく解説するから，心配は不要だよ。

右辺 $=4$ （1 でない）の次の 2 元 1 次不定方程式：

$13x-25y=4$ ……① （x, y は共に整数）の整数解を求めてみよう。

この①をみたす整数 (x, y) の組は，$(x, y)=(8, 4)$ より

$13\cdot8-25\cdot4=4$ ……② となるね。

ン？①の 1 組の解が $(x, y)=(8, 4)$ となるって言われたって，そんなのすぐには思いつかないって!?

そうだね。種明かしをしておこう。

右辺が 4 である①の解は求めづらくても，右辺が $\underline{\underline{1}}$ の次の

$13x-25y=\underline{\underline{1}}$ ……①´

の 1 組の解ならば，すぐに分かるだろう？……，そうだね。

$(x, y)=(2, 1)$ であれば

$13\cdot\underline{2}-25\cdot\underline{1}=\underline{\underline{1}}$ ……②´ となって，①´ をみたすからね。

であれば，②´ の両辺を 4 倍して，

$13\cdot\underline{8}-25\cdot\underline{4}=\underline{\underline{4}}$ ……② とすれば，これから

$4\cdot(13\cdot2-25\cdot1)=4$

$(x, y)=(\underline{8}, \underline{4})$ が，①の方程式をみたす 1 組の整数解であることが分かるんだね。

後は，①－②を実行すれば

$13(x-8)-25(y-4)=0$ より

$13(\underbrace{x-8}_{25n})=25(\underbrace{y-4}_{13n\,(n:\text{整数})})$ ……③

x と y は共に整数で，13 と 25 は互いに素より，整数 n を用いて，

$x-8=25n$ ……④ より，$x=25n+8$ ……④´ となる。

④を③に代入して，

$13\cdot\cancel{25}n=\cancel{25}(y-4)$ より，$y=13n+4$ ……⑤となる。

以上④´，⑤より，①の整数解の組は，

$(x, y)=(\underline{25n+8, 13n+4})$ （n：整数）となるんだね。

具体的には，……，$(-17, -9)$, $(8, 4)$, $(33, 17)$, $(58, 30)$, ……

$n=-1$ のとき　$n=0$ のとき　$n=1$ のとき　$n=2$ のとき

それでは次の 2 元 1 次不定方程式：

$164x+47y=\underline{\underline{-3}}$ ……① (x, y は共に整数) の整数解を求めてみよう。

……，もう気付いた？そうだね，この①は，練習問題 34(P120) の 2 元 1 次不定方程式：$164x+47y=1$ ……①′ の右辺が $\underline{\underline{-3}}$ になっているだけなんだね。

よって，ユークリッドの互除法を用いると，

$164\cdot(-2)+47\cdot7=1$ ……②′

コークリッドの互除法

$$\begin{cases} 164=47\times3+23 & \cdots\cdots(a) \\ 47=23\times2+1 & \cdots\cdots(b) \\ 23=\underline{1}\times23 \end{cases}$$

最大公約数 g

(a)，(b) より

$47-2\cdot23=1$

$47-2\cdot(164-3\cdot47)=1$

$164\cdot(-2)+47\cdot7=1$

となるので，②′の両辺に -3 をかけて

$164\cdot6+47\cdot(-21)=-3$ ……②

となる。つまり，$(x, y)=(6, -21)$ が，

①の 1 組の整数解となるんだね。

よって，①－②を実行すると，

$164\cdot(x-6)+47(y+21)=0$

$164(\underline{x-6})=47(\underline{-y-21})$ ……③

$47n$　　$164n$ (n 定数)

x と y は共に整数で，164 と 47 は互いに素より，整数 n を用いて，

$x-6=47n$ ……④　より，$x=47n+6$ ……④′

④を③に代入して，

$164\cdot\cancel{47}n=\cancel{47}\cdot(-y-21)$ ，　$164n=-y-21$

$\therefore\ y=-164n-21$ ……⑤　となる。

以上④′，⑤より，①の整数解の組は，

$(x, y)=(47n+6, -164n-21)$ (n:整数) となるんだね。

このように，a と b が大きな互いに素な整数で，右辺の n が $n\neq1$ のときの 2 元 1 次不定方程式：$ax+by=n$ の場合でも，まず $ax+by=1$ をみたす，1 組の整数解 (x_1, y_1) をユークリッドの互除法で求め，これらに n をかけた (nx_1, ny_1) が，$ax+by=n$ の 1 組の整数解になることを知っておけばいいんだね。

練習問題 35　$ax+by=n$ 型の応用問題　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

x, y が共に整数のとき，次の 2 元 1 次不定方程式を解け。

$136x-37y=3$　……①

まず，$136x-37y=1$　……①′ の 1 組の整数解 (x_1, y_1) を，ユークリッドの互除法により求めて，①に代入して　$136\cdot x_1-37\cdot y_1=1$　とし，この両辺に 3 をかけて，$136\cdot 3x_1-37\cdot 3y_1=3$　となるので，$(3x_1, 3y_1)$ が①の 1 組の整数解になるんだね。頑張って，①の一般解を求めよう！

まず，方程式：$136x-37y=1$　……①′ (x, y は共に整数) について，

a　b　①の右辺 $=1$ としたもの

考える。互いに素であることを確かめる

$a=136$，$b=37$　とおいて，ユークリッドの互除を用いて，a と b の最大公約数 g を求めると，

$136=37\times 3+25$　……②

$37=25\times 1+12$　……③

$25=12\times 2+1$　……④

$12=1\times 12$　となる。

これが g なので，a と b は互いに素

よって，$g=1$ となるので，$a=136$ と $b=37$ は互いに素である。

②，③，④より

$$\begin{cases} 136-3\cdot 37=25 & \cdots\cdots ②' \\ 37-25=12 & \cdots\cdots ③' \\ 25-2\cdot 12=1 & \cdots\cdots ④' \end{cases}$$ より

③′ を④′に代入して，$25-2\cdot(37-25)=1$

$25-2\cdot 37+2\cdot 25=1$ より，$3\cdot 25-2\cdot 37=1$　……⑤

②′ を⑤に代入して，

$3\cdot(136-3\cdot 37)-2\cdot 37=1$

よって，$136 \cdot 3 - 37 \cdot 11 = 1$　……⑥

これから，①´の 1 組の整数解が $(x,\ y) = (3,\ 11)$ と分かる。
よって，⑥の両辺を 3 倍して，
①の 1 組の整数解を求めよう。

⑥の両辺に 3 をかけて，

$136 \cdot 9 - 37 \cdot 33 = 3$　……⑦

となる。⑦から，①の 1 組の整数解

が，$(x,\ y) = (9,\ 33)$ と分かる。①と⑦を並べて書くと，

$$\begin{cases} 136 \cdot x - 37 \cdot y = 3 & \cdots\cdots① \\ 136 \cdot 9 - 37 \cdot 33 = 3 & \cdots\cdots⑦ \end{cases}$$
となる。よって，

①－⑦より，$136(x-9) - 37(y-33) = 0$

$136(\underbrace{x-9}_{37n}) = 37 \cdot (\underbrace{y-33}_{136n\,(n:\text{整数})})$　……⑧　となる。

ここで，x と y は共に整数で，136 と 37 は互いに素より，整数 n を用いると

$x - 9 = 37n$　……⑨　より，　$x = 37n + 9$　……⑨´となる。

⑨を⑧に代入して，

$136 \cdot \cancel{37}n = \cancel{37} \cdot (y - 33)$　　$y - 33 = 136n$

$\therefore\ y = 136n + 33$　……⑩　となる。

以上⑨´，⑩より，①の整数解の組は，

$(x,\ y) = (37n + 9,\ 136n + 33)$　(n：整数) となる。

ン？これで，2 元 1 次不定方程式についても自信がもてるようになったって？いいね。その調子だ！

以上で，今日の講義は終了です。かなり盛りだくさんな内容だったから，消化不良を起こさないように，シッカリ復習しておこう！

次回で，整数の性質も最後だけれど，また分かりやすく教えるつもりだ。

では，また会おう。みんな元気でな…。