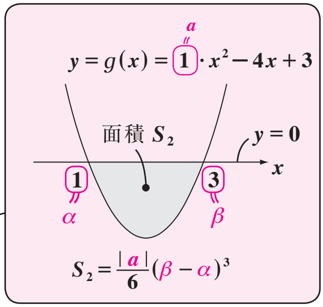
次，練習問題 70(2) (P258) の問題も見てみよう。これも，放物線 $y=g(x)=\underbrace{1}_{a}\cdot x^2-4x+3$ と，$\underbrace{\text{直線 } y=0}_{x\text{ 軸}}$ とで囲まれる図形の面積 $S_2$ を求める問題だった。

$y=g(x)$ と $y=0$ との交点の $x$ 座標は，$\underbrace{1}_{\alpha}$ と $\underbrace{3}_{\beta}$

だったので，面積 $S_2$ を求めるのに必要な数値が $a=1$，$\alpha=1$，$\beta=3$ となるんだね。

よって，求める面積 $S_2$ は，

$$S_2=\frac{|\overset{1}{a}|}{6}(\underbrace{\beta}_{3}-\underbrace{\alpha}_{1})^3=\frac{|1|}{6}(3-1)^3$$



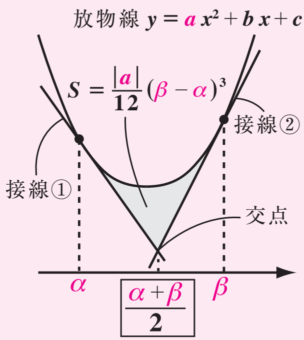

$$=\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}$$ となって，これも前に定積分で計算した結果と一致するだろう。どう？ 面積公式の威力が分かった？

それでは，重要な面積公式をもう 1 つ紹介しておこう。放物線と 2 本の接線とで囲まれる図形の面積は次の公式でアッという間に求められるんだね。これも重要公式なので，シッカリ頭に入れよう！

## 面積公式 (Ⅱ)

$y=ax^2+bx+c$ とその 2 つの接線①，② とで囲まれる図形の面積 $S$ は，放物線と 2 接線の接点の $x$ 座標 $\alpha$，$\beta\ (\alpha<\beta)$ と，$x^2$ の係数 $a$ の 3 つだけで，次のように簡単に計算できる。

$$\text{面積 } S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$



この面積公式についても，次の練習問題で早速練習しておこう。

**練習問題 72** 面積公式 CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

放物線 $C: y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$ と，点 A$(1,\ -4)$ がある。
(1) 点 A を通り，放物線 $C$ に接する 2 本の接線 $L_1$ と $L_2$ の方程式を求めよ。
(2) 放物線 $C$ と 2 本の接線 $L_1$，$L_2$ とで囲まれる図形の面積 $S$ を求めよ。

(1) は，放物線 $C$ 上にない点 A から放物線 $C$ に引く接線の方程式を求める問題なんだね。この問題の解法の手順は，次の 3 ステップだよ。

(i) 放物線 $C: y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式
$y=f'(t)\cdot(x-t)+f(t)$ …………①をたてる。

(ii) ①は，点 A$(1,\ -4)$ を通るので，この座標を①に代入して，$t$ の 2 次方程式を作る。

(iii) $t$ の 2 次方程式を解いて，$t$ の値を①に代入して，接線の方程式を求める。

ちょっとメンドウだけれど，頑張ろう。

(2) は，放物線と 2 つの接線とで囲まれる図形の面積を求める問題なので，面積公式 $S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$ を使えば，簡単に答えを導けるんだね。

(1) 放物線 $C: y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$ を $x$ で微分して，

$f(1)=\frac{1}{2}\cdot1^2=\frac{1}{2}$ となるので，点 A$(1,\ -4)$ は放物線 C 上の点ではないね。

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=\frac{1}{2}\cdot2x=x$$

(i) よって，放物線 $C$ 上の点 $\left(t,\ \underbrace{\frac{1}{2}t^2}_{f(t)}\right)$ における接線の方程式は

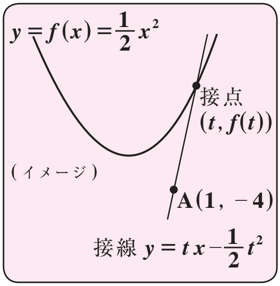
$$y=t\cdot(x-t)+\frac{1}{2}t^2 \qquad y=t\cdot x\underbrace{-t^2+\frac{1}{2}t^2}_{-\frac{1}{2}t^2}$$

$[y=f'(t)\cdot(x-t)+f(t)]$

$y=t\cdot x-\frac{1}{2}t^2$ ……①となる。

**1st.** ステップ
まず，C 上の点 $(1,f(t))$ における接線の式を立てる。

(ⅱ) 接線 $y = t \cdot x - \frac{1}{2}t^2$ ……①は，点 $A(1, -4)$




を通るので，A の座標を①に代入して

$$-4 = t \cdot 1 - \frac{1}{2}t^2$$

$\frac{1}{2}t^2 - t - 4 = 0$　両辺に 2 をかけて

$$t^2 \underbrace{-2}_{\substack{\text{たして}\\ -4+2}}t \underbrace{-8}_{\substack{\text{かけて}\\ (-4)\cdot 2}} = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

**2nd.** ステップ
A の座標を代入して，$t$ の 2 次方程式を立てる。

(ⅲ) ②を解いて

$$(t-4)(t+2) = 0 \quad \therefore t = 4,\ -2$$

**3rd.** ステップ
$t$ の値を求めて，それらを①に代入して，2 本の接線の方程式を求める。

(ア) $t = 4$ を①に代入して

$$y = 4 \cdot x \underbrace{- \frac{1}{2} \cdot 4^2}_{-\frac{1}{2}\times 16 = -8}$$

$\therefore$ 接線 $L_1$ の方程式は　$y = 4x - 8$　となる。

(イ) $t = -2$ を①に代入して

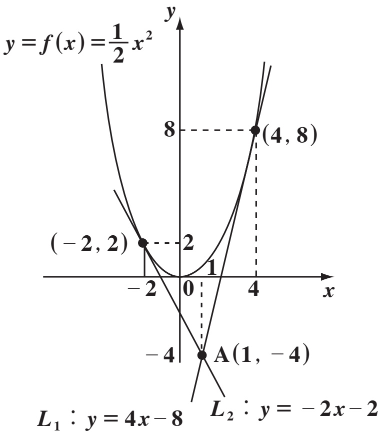
$$y = -2 \cdot x \underbrace{- \frac{1}{2} \cdot (-2)^2}_{-\frac{1}{2}\times 4 = -2}$$

$\therefore$ 接線 $L_2$ の方程式は　$y = -2x - 2$　となる。

以上 (ⅰ)(ⅱ)(ⅲ) より，点 A を通り放物線 C に接する 2 本の接線 $L_1$，$L_2$ の方程式は，

$$\begin{cases} L_1 : y = 4x - 8 \\ L_2 : y = -2x - 2 \end{cases}$$

となって答えだ。




もちろん，$L_1 : y = -2x - 2$，$L_2 : y = 4x - 8$ としても答えだよ。

どう？面白かった？

(2) 放物線 $C$ : $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$ と，その2つの接線 $L_1$ : $y=4x-8$ と $L_2$ : $y=-2x-2$ とで囲まれる図形の面積 $S$ は

・$a=\frac{1}{2}$，$\alpha=-2$，$\beta=4$ の3つの値から，面積公式を使うと，

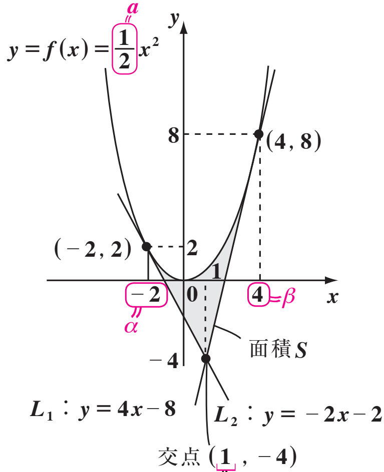
$$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{\left|\frac{1}{2}\right|}{12}\{4-(-2)\}^3$$

$$=\frac{1}{24}\times 6^3=\frac{6^3}{6\times 4}=\frac{6^2}{4}$$

$$=\frac{36}{4}=9$$

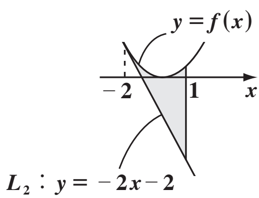
となって，簡単に答えは，求まってしまうんだね。でも，答案には，積分計算の式をキチンと書いておくようにしよう。



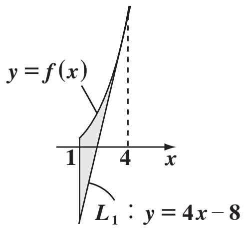

2接線 $L_1$ と $L_2$ の交点の $x$ 座標は，2つの接点の $x$ 座標 $\alpha$ と $\beta$ の相加平均 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ に必ずなるんだね。これも覚えておこう！

今回の面積 $S$ を積分の式で表すと，次のように2つの部分の面積の和の形になるんだね。

$$\text{面積 } S=\int_{-2}^{1}\Big\{\underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{f(x)}-(-2x-2)\Big\}dx+\int_{1}^{4}\Big\{\underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{f(x)}-(4x-8)\Big\}dx$$




+




$$=\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+2\right)dx+\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{2}x^2-4x+8\right)dx$$

以上より，求める面積 $S$ は

この結果は面積公式から求めた。

$$S=\underbrace{\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+2\right)dx}_{㋐}+\underbrace{\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{2}x^2-4x+8\right)dx}_{㋑}=9$$ となって答えだ！

もちろん，㋐と㋑を実際に積分してみると

㋐ $\displaystyle\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+2\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3+x^2+2x\right]_{-2}^{1}$

$$=\frac{1}{6}\cdot 1^3+\underbrace{1^2+2\cdot 1}_{\boxed{3}}-\left\{\underbrace{\frac{1}{6}\cdot(-2)^3}_{\boxed{-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}}}+\underbrace{\cancel{(-2)^2}+\cancel{2\cdot(-2)}}_{\boxed{4-4=0}}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}+3+\frac{4}{3}=\frac{1+18+8}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$ となるし，

㋑ $\displaystyle\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{2}x^2-4x+8\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3-2x^2+8x\right]_{1}^{4}$

$$=\underbrace{\frac{1}{6}\cdot 4^3}_{\boxed{\frac{32}{3}}}\underbrace{-\cancel{2\cdot 4^2}+\cancel{8\cdot 4}}_{\boxed{-32+32=0}}-\left(\underbrace{\frac{1}{6}\cdot 1^3}_{\boxed{\frac{1}{6}}}\underbrace{-2\cdot 1^2+8\cdot 1}_{\boxed{-2+8=6}}\right)$$

$$=\frac{32}{3}-\frac{1}{6}-6=\frac{64-1-36}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$ となるので

$$S=\underbrace{\frac{9}{2}}_{㋐}+\underbrace{\frac{9}{2}}_{㋑}=9$$ となって，ナルホド面積公式で求めた結果と一致するんだね。数学って，よく出来てるだろう！

以上で，**「初めから始める数学Ⅱ　改訂１」**の講義もすべて終了です！みんな最後までよく頑張ったね！ やりとげた後の爽快感はまた格別だね。でも，**1** 回ですべてマスターしたつもりになってはいけないよ。この後，シッカリ復習することだ。そして，次回の講義では，さらに成長したキミ達に会うことを楽しみにしている。それまで，みんな元気でな。さようなら…

**マセマ代表　馬場敬之**（けいし）