## ● 3 項間の漸化式にもチャレンジしよう！

3 項間の漸化式とは，具体的には $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ $(p, q$：定数$)$の形の漸化式のことで，実際に 3項 $a_n$と $a_{n+1}$と $a_{n+2}$の関係式になっている。

この場合，初項 $a_1$だけでなく，第 2項 $a_2$の値も与えられる。

具体例を出しておこう。

$$\begin{cases} a_1=1,\ \ a_2=5 \\ a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0 \quad \cdots\cdots\cdots①\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

$p=-5, q=6$ の場合

①を変形して，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ ………①′となるね。そして，

・$n=1$のとき，$a_{n+2}=a_{1+2}=a_3$，$a_{n+1}=a_{1+1}=a_2$，$a_n=a_1$より①′は，

$$a_3=5\underbrace{a_2}_{5}-6\underbrace{a_1}_{1}=5\cdot5-6\cdot1=25-6=19$$

・$n=2$のとき，$a_{n+2}=a_{2+2}=a_4$，$a_{n+1}=a_{2+1}=a_3$，$a_n=a_2$より①′は，

$$a_4=5\underbrace{a_3}_{19}-6\underbrace{a_2}_{5}=5\cdot19-6\cdot5=95-30=65$$

・$n=3$のときも同様に

$$a_5=5a_4-6a_3=5\cdot65-6\cdot19=325-114=211$$

……………………………………………　　　　…………………

と，この後も $a_6$，$a_7$，$a_8$，…を，その前の 2項の値から①′を使って求めていけることが分かったと思う。

では，この一般項 $a_n$はどのように求めるのか？ その手順を①の例題を使って解説していこう。

まず，$\underbrace{a_{n+2}}_{x^2}-5\underbrace{a_{n+1}}_{x}+6\underbrace{a_n}_{1を代入する}=0$ …①の漸化式の $a_{n+2}$に $x^2$を，$a_{n+1}$に $x$を，

そして $a_n$に 1を代入してできる次の 2次方程式②を特性方程式と呼ぶ。

$\underbrace{x^2-5x+6=0}_{特性方程式}$ …②　　これを解いて

$(x-2)(x-3)=0$　より，$x=2,\ 3$

この特性方程式②の解 $x = 2,\ 3$ を用いると，
①の 3項間の漸化式から，次のように 2つの
等比関数列型の漸化式を導くことができる。

$a_1 = 1,\ a_2 = 5$
$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ …①
$x^2 - 5x + 6 = 0$ …………②
②の解 $x = 2,\ 3$

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2\cdot a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2\cdot a_n) & \cdots\cdots③ \\ [\ F(n+1) = 3\cdot F(n)\ ] & \\ a_{n+2} - 3\cdot a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3\cdot a_n) & \cdots\cdots④ \\ [\ G(n+1) = 2\cdot G(n)\ ] & \end{cases}$$

・③について，これを変形すると，

$a_{n+2} - 2a_{n+1} = \underbrace{3(a_{n+1} - 2a_n)}_{3a_{n+1} - 6a_n}$　右辺を左辺に移項して

$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_{n+1} + 6a_n = 0$
$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$　となって，ナルホド①と一致する。

また，$F(n) = a_{n+1} - 2a_n$ とおくと，$F(n+1) = a_{\underset{n+1+1}{n+2}} - 2a_{n+1}$ となるので，

$n$ の代わりに，$n+1$ を代入したもの

③は，等比関数列型漸化式 $F(n+1) = 3\cdot F(n)$ になっていることも分かる。
同様に，
・④についても，これを変形すると，
$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2a_{n+1} - 6a_n$ より，
$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ となって，ナルホド①と一致する。

また，$G(n) = a_{n+1} - 3a_n$ とおくと，$G(n+1) = a_{\underset{n+1+1}{n+2}} - 3a_{n+1}$ となるので，

$n$ の代わりに，$n+1$ を代入したもの

④も等比関数列型漸化式 $G(n+1) = 2\cdot G(n)$ になっている。

後は，アッという間に一般項が求まるんだよ。

③より，$a_{n+1} - 2a_n = (\underset{a_{1+1}=5}{a_2} - 2\cdot \underset{1}{a_1})\cdot 3^{n-1} = (5-2)\cdot 3^{n-1} = 3^n$ ……………③′

$[\ F(n) = F(1) \cdot 3^{n-1}\ ]$

$F(n) = a_{n+1} - 2a_n$ の $n$ に $n = 1$ を代入したものが $F(1) = a_{\underset{1+1}{2}} - 2a_1$ だ。

④より，$a_{n+1}-3a_n=(\overset{a_{1+1}=5}{\overset{\|}{\boxed{a_2}}}-3\cdot\overset{1}{\overset{\|}{\boxed{a_1}}})\cdot 2^{n-1}=(5-3)\cdot 2^{n-1}=2^n$ ……………④´

$[\quad G(n) \quad = \quad G(1) \quad \cdot \quad 2^{n-1}]$

以上より，

$$\begin{cases} a_{n+1}-2a_n=3^n \text{ ……③´} \\ a_{n+1}-3a_n=2^n \text{ ……④´} \end{cases}$$ から

③´−④´を求めると，$\underbrace{\cancel{a_{n+1}}-2a_n-(\cancel{a_{n+1}}-3a_n)}_{-2a_n+3a_n=a_n}=3^n-2^n$　より

一般項 $a_n=3^n-2^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が求まるんだね。面白かった？

でも，今キミ達の頭の中では，3 項間の漸化式の特性方程式って何 !? 何で $F(n+1)=r\cdot F(n)$ の形の漸化式が出来るんだ…などなど，疑問が次々に浮かんできてると思う。これから，詳しく解説しておこう。

一般に，3 項間の漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ ……(a) $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ $(p,\ q$：定数$)$ が与えられたら，ボク達は，これを変形して 2 つの定数 $\alpha$，$\beta$ を用いて，次の 2 つの等比関数列型の漸化式にもち込みたいんだね。

$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha\cdot a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha\cdot a_n) \text{ ……(b)} \\ [\quad F(n+1) \quad =\beta\cdot F(n) \quad ] \\ a_{n+2}-\beta\cdot a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta\cdot a_n) \text{ ……(c)} \\ [\quad G(n+1) \quad =\alpha\cdot G(n) \quad ] \end{cases}$$

この (b)，(c) は，いずれもまとめると，同じ式：

$\underbrace{a_{n+2}}_{x^2}\underbrace{-(\alpha+\beta)}_{p}\underbrace{a_{n+1}}_{x}+\underbrace{\alpha\beta}_{q}\underbrace{a_n}_{1}=0$ ……(d)　となるのは大丈夫だね。

そして，この (d) は，(a) と一致するので，

$p=-(\alpha+\beta)$，$q=\alpha\beta$ となる。ここで

この (d) の $a_{n+2}$ に $x^2$ を，$a_{n+1}$ に $x$ を，そして $a_n$ に 1 を代入すると，

特性方程式 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\cdot 1=0$……(e) が導けるね。そして，これを解くと，

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ より，$x=\alpha$，$\beta$ となる。

　つまり (d)，すなわち (a) から導いた特性方程式 (2 次方程式 )(e) は，

たまたまだけれど，$F(n+1)=\beta F(n)$ …(b) と $G(n+1)=\alpha G(n)$ …(c) を作るのに必要で大事な定数 $\alpha$，$\beta$ を解にもつ方程式になるんだね。
これで謎はすべてクリアになったと思う。
それでは，次の練習問題で実践練習しておこう。

**練習問題 34** 3 項間の漸化式 CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

次の漸化式を解け。

(1) $a_1=1$，$a_2=7$ $a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$

(2) $a_1=1$，$a_2=2$ $a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$

3 項間の漸化式の問題なので，$a_{n+2}$に $x^2$を，$a_{n+1}$に $x$を，$a_n$に 1を代入した特性方程式を解いて，その解を使って等比関数列型の漸化式を 2 つ作ればいいんだね。後はアッという間に解けるからね。

(1) $a_1=1$，$a_2=7$

$\underbrace{a_{n+2}}_{x^2}-7\underbrace{a_{n+1}}_{x}+12\underbrace{a_n}_{1}=0$ ……① $(n=1,2,3,\cdots)$ とおく。

①の特性方程式：$x^2-7x+12=0$ を解いて，

$(x-3)(x-4)=0$ $\therefore x=3,\ 4$

この解 3 と 4 を用いて，①を変形すると，

$$\begin{cases} a_{n+2}-3\cdot a_{n+1}=4\cdot(a_{n+1}-3\cdot a_n) \\ [\ F(n+1)=4\cdot F(n)\ ] \\ a_{n+2}-4\cdot a_{n+1}=3\cdot(a_{n+1}-4\cdot a_n) \\ [\ G(n+1)=3\cdot G(n)\ ] \end{cases}$$

よって，

$$\begin{cases} a_{n+1}-3a_n=(\overset{7}{a_2}-3\overset{1}{a_1})\cdot 4^{n-1} \\ [\ F(n)=F(1)\cdot 4^{n-1}\ ] \\ a_{n+1}-4a_n=(\overset{7}{a_2}-4\overset{1}{a_1})\cdot 3^{n-1} \\ [\ G(n)=G(1)\cdot 3^{n-1}\ ] \end{cases}$$

アッ！

という間

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} - 3a_n = 4^n & \cdots\cdots ② \\ a_{n+1} - 4a_n = 3^n & \cdots\cdots ③ \end{cases} \quad \text{より，}$$

② − ③を求めて，一般項 $a_n = 4^n - 3^n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ となる。

**(1)** $a_1 = 1, \ a_2 = 2$

$\underbrace{a_{n+2}}_{x^2} - 2\underbrace{a_{n+1}}_{x} - 3\underbrace{a_n}_{1} = 0 \ \cdots\cdots ④ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく。

①の特性方程式：$x^2 - 2x - 3 = 0$ を解いて，

$(x-3)(x+1) = 0 \qquad \therefore x = 3, \ -1$

この解 $3$ と $-1$ を用いて，④を変形すると，

$a_{n+2} - (-1)a_{n+1} = 3 \cdot \{a_{n+1} - (-1) \cdot a_n\}$

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3 \cdot a_{n+1} = -1 \cdot (a_{n+1} - 3 \cdot a_n) \\ [\ F(n+1) = -1 \cdot F(n) \ ] \\ a_{n+2} + 1 \cdot a_{n+1} = 3 \cdot (a_{n+1} + 1 \cdot a_n) \\ [\ G(n+1) = 3 \cdot G(n) \ ] \end{cases}$$

よって，

アッ！

という間

$$\begin{cases} a_{n+1} - 3a_n = (\overset{2}{a_2} - 3\overset{1}{a_1}) \cdot (-1)^{n-1} \\ [\ F(n) = F(1) \cdot (-1)^{n-1} ] \\ a_{n+1} + a_n = (\overset{2}{a_2} + \overset{1}{a_1}) \cdot 3^{n-1} \\ [\ G(n) = G(1) \cdot 3^{n-1} ] \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} - 3a_n = (-1)^n & \cdots\cdots ⑤ \\ a_{n+1} + a_n = 3^n & \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases} \quad \text{より，}$$

⑥ − ⑤から，$4a_n = 3^n - (-1)^n$

よって，求める一般項 $a_n$ は，$a_n = \dfrac{1}{4}\{3^n - (-1)^n\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

となって，答えだ。面白かった？

以上で，数列の漸化式の講義も終了です！ エッ，骨が折れたって!? そうだね。特に，今日の講義は内容満載だったからね。だから，1 回で理解しようと気負う必要はないよ。2 回，3 回…と繰り返し練習してマスターしていこう！

では，次回で数列も最終回だけれど，みんな元気でな。バイバイ…。