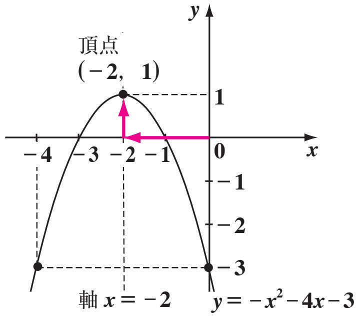
また，$x=0$ のとき $y=-3$ だから，点 $(0,\ -3)$ を通る。さらに，この点と軸 $x=-2$ に関して対称な点 $(-4,\ -3)$ も通ることが分かるだろう。これで，この放物線が通る **3** 点が分かったので，これらを滑らかな曲線で結べば放物線 $y=-x^2-4x-3$ が完成するんだね。(図 **7**)

どう？ 慣れると簡単でしょう？

図 7 $y=-x^2-4x-3$ のグラフ



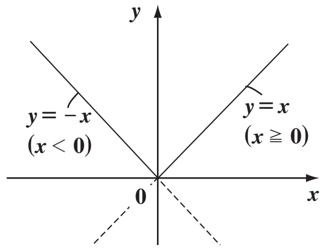
そして，この平行移動の公式は放物線だけでなく，一般の関数の平行移動にも利用できるんだよ。その一例として，x の絶対値の関数 $y=|x|$ を平行移動してみよう。

$$y=|x|=\begin{cases} x & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x & (x<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$x \geqq 0$ のとき $\underbrace{|x|}_{0\text{以上}} = \underbrace{x}_{0\text{以上}}$

$x<0$ のとき $\underbrace{|x|}_{\ominus} = \underbrace{-x}_{\oplus}$ だからね。

図 8 $y=|x|$ のグラフ



よって，$y=|x|$ のグラフは，(i) $x \geqq 0$ のとき，$y=x$，(ii) $x<0$ のとき，$y=-x$ となって，原点でポキンと折れた形になるんだね。

そして，この $y=|x|$ を $(2,\ 1)$ だけ平行移動してみると，

$$y=|x| \xrightarrow[\begin{cases} x \text{ の代わりに } x-2 \\ y \text{ の代わりに } y-1 \end{cases}]{(2,\ 1)\text{ だけ平行移動}} y-1=|x-2| \quad \text{より}$$

$y=|x-2|+1$ となるんだね。

これは，

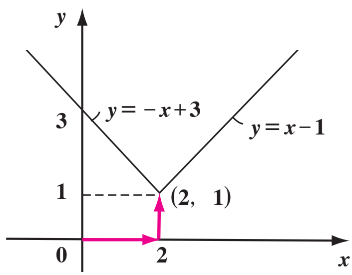
(i) $x-2 \geqq 0$，つまり $x \geqq 2$ のとき

$y=x-2+1=x-1$

(ii) $x-2<0$，つまり $x<2$ のとき

$y=-(x-2)+1=-x+3$ となり，

図 9 $y=|x-2|+1$ のグラフ



点 $(2,\ 1)$ でポキンと折れた図 **9** に示すようなグラフになるんだね。納得いった？

● 放物線の対称移動にもチャレンジしよう！

放物線の平行移動の解説が終わったので，次に，対称移動についても勉強しよう。この対称移動には，(ⅰ) x 軸に関する対称移動，(ⅱ) y 軸に関する対称移動，そして (ⅲ) 原点 **0** に関する対称移動の **3** つがあるんだよ。そして，これらの対称移動の公式も，平行移動のものと同様に，放物線だけでなく，一般の関数にあてはまるものなので，関数 $y=f(x)$ の対称移動という形で解説しよう。

(ⅰ) x 軸に関する対称移動

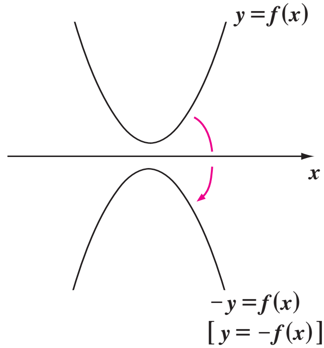
関数 $y=f(x)$ を，x 軸に関して対称に移動するためには，y の代わりに $-y$ を代入すればいいんだね。

つまり，

$$y=f(x)\ \xrightarrow[y\text{の代わりに}-y]{x\text{軸に対称移動}}\ \underline{-y=f(x)}$$

両辺に -1 をかけて，
$y=-f(x)$ のこと

図 10　x 軸に関する対称移動のイメージ



よって，図 **10** に示すように，$y=f(x)$ のグラフを，x 軸を鏡の面のようにして，上下に対称にグラフを移動したかったら，$y=-f(x)$ とすればいいんだね。

(1) $y=2x^2-4x-1$ を，x 軸に関して対称移動したものの方程式を求めよう。

この場合，y の代わりに $-y$ を代入すればいいので，

$-y=2x^2-4x-1$　だね。よって，この両辺に -1 をかけて

$y=-(2x^2-4x-1)=-2x^2+4x+1$　となる。

(2) $y=|x-2|+1$ を，x 軸に関して対称移動したものの方程式を求めよう。

求める関数は，$-y=|x-2|+1$ より，両辺に -1 をかけて，

$y=-|x-2|-1$　となるんだね。大丈夫？

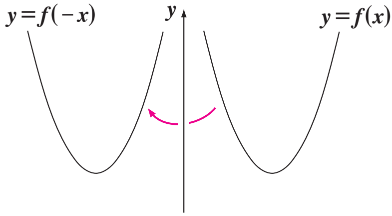
(ⅱ) y 軸に関する対称移動

関数 $y=f(x)$ を，y 軸に関して対称に移動するためには，x の代わりに $-x$ を代入すればいいんだね。

つまり，

$$y=f(x)\ \xrightarrow[x\text{ の代わりに }-x]{y\text{ 軸に対称移動}}\ y=f(-x)$$

図 11 y 軸に関する対称移動のイメージ



よって，図 **11** に示すように，$y=f(x)$ のグラフを，y 軸を鏡の面のようにして，左右に対称にグラフを移動したかったら，$y=f(-x)$ とすればいいんだね。

(3) $y=2x^2-4x-1$ を，y 軸に関して対称移動したものの方程式を求めよう。

この場合，x の代わりに $-x$ を代入すればいいので，

$y=2\underbrace{(-x)^2}_{\boxed{x^2}}-4\cdot(-x)-1=2x^2+4x-1$　となる。

(4) $y=|x-2|+1$ を，y 軸に関して対称移動したものの方程式を求めよう。

x の代わりに $-x$ を代入すればいいので，

$y=\underbrace{|-x-2|}_{\boxed{|x+2|}}+1=|x+2|+1$　となる。

$|3|=3$，$|-3|=3$ より，絶対値内の符号を入れ替えても変化しない。
だから，たとえば，$|-x|=|x|$，$|-t+2|=|t-2|$など……となる。

(ⅲ) 原点 **0** に関する対称移動

関数 $y=f(x)$ を原点 **0** に関して対称移動するためには，x の代わりに $-x$ を，そして，y の代わりに $-y$ を代入すればいいんだね。

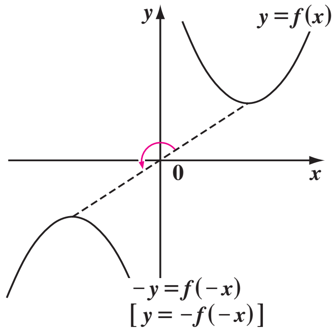
つまり，

$$y=f(x)\ \xrightarrow[\begin{cases}x\text{ の代わりに }-x\\ y\text{ の代わりに }-y\end{cases}]{\text{原点 }\mathbf{0}\text{ に対称移動}}\ -y=f(-x)$$

両辺に -1 をかけて，
$y=-f(-x)$ のこと

よって，図 12 に示すように，$y=f(x)$ のグラフを原点 0 のまわりにクルリと 180° 回転させて原点に関して対称移動したかったら，$y=-f(-x)$ とすればいいんだね、この原点 0 に関して対称移動する操作は，実は下に示すように，x 軸に関する対称移動と y 軸に関する対称移動を併せたものと考えてもいいんだよ。

図 12 原点に関する対称移動のイメージ



$$\underline{y=f(x)} \xrightarrow[y\text{ の代わりに }-y]{x\text{ 軸に対称移動}} y=-f(x) \xrightarrow[x\text{ の代わりに }-x]{y\text{ 軸に対称移動}} \underline{y=-f(-x)}$$

原点に関する対称移動

(5) $y=2x^2-4x-1$ を，原点に関して対称移動したものの方程式を求めよう。

この場合，x の代わりに $-x$ を，y の代わりに $-y$ を代入すればいいので，

$-y=2(-x)^2-4\cdot(-x)-1$ より，$-y=2x^2+4x-1$

$\therefore\ y=-(2x^2+4x-1)=-2x^2-4x+1$ となるんだね。

(6) $y=|x-2|+1$ を，原点に関して，対称移動したものの方程式を求めよう。

x の代わりに $-x$ を，y の代わりに $-y$ を代入して，

$-y=|-x-2|+1$ より，$-y=|x+2|+1$

$\therefore\ y=-|x+2|-1$ となるんだね。大丈夫だった？

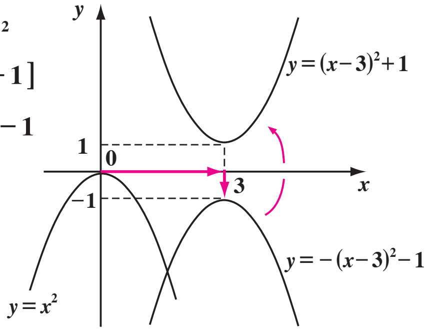
以上，解説した平行移動と対称移動を組み合わせれば，関数のグラフを自由に移動させることが出来るので，次の例題も簡単に解けるはずだ。

(7) $y=-x^2$ を，$(3,\ -1)$ だけ平行移動して，x 軸に関して対称移動したものの方程式を求めよう。

$$y = -x^2 \xrightarrow[\text{平行移動}]{(3,\ -1)} y+1 = -(x-3)^2$$
$$[\,y = -(x-3)^2 - 1\,]$$
$$\xrightarrow[\text{対称移動}]{x\text{ 軸に}} -y = -(x-3)^2 - 1$$

以上より，求める関数は，

$y=(x-3)^2+1$ となるんだね。右に，グラフも示しておいたので，移動の様子がヴィジュアルに分かるはずだ。

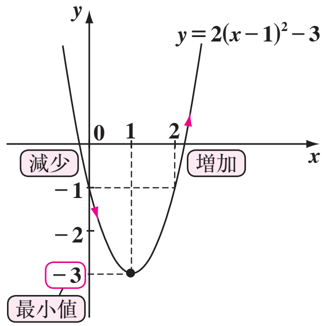


● 2次関数の最大・最小問題にもトライしよう！

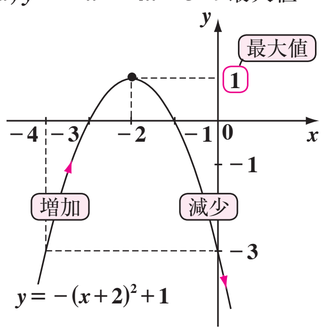
2次関数の最大値・最小値については，例題 (c)，(d) (P126) の 2 つの 2 次関数を使って解説しよう。(図 13)

図 13 2次関数の最大値・最小値

(c) $y=2x^2-4x-1$ の最小値 $=-3$



(d) $y=-x^2-4x-3$ の最大値 $=1$



(c) $y=2x^2-4x-1=2(x-1)^2-3$

のグラフから，その y 座標は

$$\begin{cases} x<1 \text{ で減少し，また，} \\ x>1 \text{ で増加し，} \end{cases}$$

丁度 $x=1$ のとき，y 座標は最も小さな値，すなわち "最小値 -3" をとることが分かるね。また，このグラフでは，y 座標はいくらでも大きくなり得るので，この場合，"最大値は存在しない" という。

(d) $y=-x^2-4x-3=-(x+2)^2+1$

についても，そのグラフから，y 座標は

$$\begin{cases} x<-2 \text{ で増加し，また，} \\ x>-2 \text{ で減少し，} \end{cases}$$

丁度 $x=-2$ のとき，y 座標は最も大きな値，すなわち "最大値 1" をとることが分かるはずだ。また，このグラフの y 座標はどこまでも小さくなり得るので，この場合，"最小値は存在しない" と言えばいいんだよ。