## ● ヘロンの公式にもチャレンジしよう！

これまでの解説で，三角比の図形への応用の講義はほぼ終わっているんだけれど，最後にもう **1** つ，**“ヘロンの公式”** について教えよう。

ヘロンの公式とは，△**ABC** の **3** 辺の長さ $a$，$b$，$c$ が分かれば，これらから **cos** や **sin** の値を求めることなしに，直接△**ABC** の面積を求めることができる，とても便利な公式なんだ。

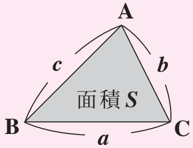
まず，このヘロンの公式を示そう。

### ヘロンの公式

△**ABC** の **3** 辺の長さ $a$，$b$，$c$ が与えられているとき，

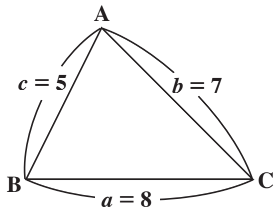
$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ を使って，△**ABC** の面積 $S$ は，次のように求められる。

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad\cdots\cdots(\ *\ )$$




ヘロンの公式って，意外とキレイな形をしていて，使えそうだって!? そうだね，まずこの公式を利用してみよう。

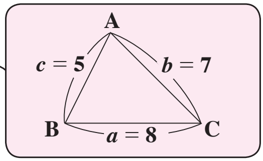
練習問題 **32**(**P201**)の (**1**) で，$\mathrm{AB}=c=5$，$\mathrm{CA}=b=7$，$\cos\mathrm{A}=\dfrac{1}{7}$ から，余弦定理を用いて，$a=8$ を導いたね。




この時点で，△**ABC** の **3** 辺の長さ $a=8$，$b=7$，$c=5$ が分かったので，(**2**) の△**ABC** の面積 $S$ は，ヘロンの公式から求めることができるんだね。

まず，$s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{8+7+5}{2}=\dfrac{20}{2}=10$ を求めて，ヘロンの公式を利用すると，△**ABC** の面積 $S$ は，次のように計算できる。

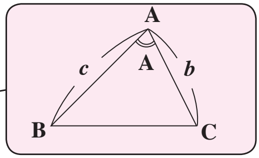
$$S=\sqrt{\underbrace{s}_{10}\,(\underbrace{s-a}_{10-8})\,(\underbrace{s-b}_{10-7})\,(\underbrace{s-c}_{10-5})}$$




$$=\sqrt{10\cdot2\cdot3\cdot5}=\sqrt{10^2\times3}$$

$=10\sqrt{3}$　となって，**P202** で求めた(2)の結果と一致するんだね。
ヘロンの公式の威力が分かったでしょう？　ン？でも，この公式をどうやったら導けるのか，知りたいって？　証明は結構大変なんだけれど，今のキミ達なら，十分理解できると思うから，ここで示しておこう。

$\triangle$**ABC** の面積 $S$ は，**2** 辺 $b$，$c$ と $\sin A$ の値が分かれば，次式で求まるんだったね。




$$S=\frac{1}{2}bc\sin A \quad \cdots\cdots①$$

この①の両辺を**2**乗して，右辺を変形していってみよう。

$$S^2=\frac{1}{4}b^2\cdot c^2\cdot\underbrace{\sin^2A}_{1-\cos^2A}$$

三角比の基本公式
$\sin^2A+\cos^2A=1$

$$=\frac{1}{4}b^2c^2\underbrace{(1-\cos^2A)}_{1^2-\cos^2A=(1+\cos A)(1-\cos A)}$$

公式
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$=\frac{1}{4}b^2c^2(1+\underbrace{\cos A}_{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}})(1-\underbrace{\cos A}_{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}})$$

余弦定理(Ⅱ)
$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$=\frac{1}{4}b^2c^2\underbrace{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}\underbrace{\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

$$\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$\frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{2bc}=\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

よって，

$$S^2=\frac{1}{4}\cancel{b^2c^2}\times\frac{(b+c)^2-a^2}{2\cancel{bc}}\times\frac{a^2-(b-c)^2}{2\cancel{bc}}$$

$$=\frac{1}{16}\{\underbrace{(b+c)^2-a^2}_{(b+c+a)(b+c-a)}\}\{\underbrace{a^2-(b-c)^2}_{\{a-(b-c)\}(a+b-c)}\}$$

公式
$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$$=\frac{1}{2^4}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

4つの( )を
2で1つずつ
割ったんだね。

$$=\underbrace{\frac{a+b+c}{2}}_{s}\times\underbrace{\frac{-a+b+c}{2}}_{(s-a)}\times\underbrace{\frac{a-b+c}{2}}_{(s-b)}\times\underbrace{\frac{a+b-c}{2}}_{(s-c)}\quad\cdots\cdots②$$

フ～，大変だって!?　でも，後もう少しだ。

$\dfrac{a+b+c}{2}=s$　とおくと

$$s-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{a+b+c-2a}{2}=\frac{-a+b+c}{2}$$

$$s-b=\frac{a+b+c}{2}-b=\frac{a+b+c-2b}{2}=\frac{a-b+c}{2}$$

$$s-c=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b+c-2c}{2}=\frac{a+b-c}{2}$$　となるので，

これらを②に代入すると

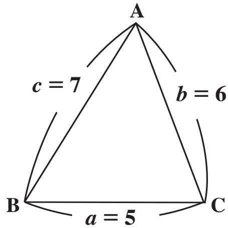
$S^2=s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)$ ……③ となる。

ここで，当然，△ABCの面積 $S$ は $S>0$ より，③の両辺の正の平方根をとると，ヘロンの公式：$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ……( ＊ )が，導かれるんだね。

公式の証明って，かなり大変なので，1回で理解しようと焦ることはないよ。何度も納得がいくまで見返して，自分のものにしていってくれたらいいんだよ。

それでは，例題で練習しておこう。

$(a)$ 3 辺の長さ $a=5$，$b=6$，$c=7$ の△ABC の面積 $S$ を求めてみよう。




まず，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

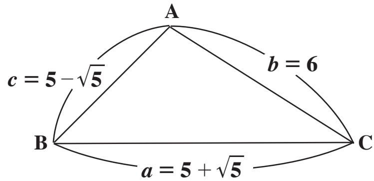
$=\frac{1}{2}(5+6+7)=\frac{18}{2}=9$ を求めて，

ヘロンの公式を用いると

$$S=\sqrt{\underbrace{s}_{9}(\underbrace{s-a}_{9-5})(\underbrace{s-b}_{9-6})(\underbrace{s-c}_{9-7})}=\sqrt{\underbrace{9\times4\times3\times2}_{3^2\times2^2\times3^1\times2^1=3^3\times2^3=6^3=6^2\times6}}$$

$=\sqrt{6^2\times6}=6\sqrt{6}$ と，スグに答えが求まるんだね。

$(b)$ 3 辺の長さが，$a=5+\sqrt{5}$，$b=6$，$c=5-\sqrt{5}$ の△ABC の内接円の半径 $r$ を求めてみよう。




まず，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

$=\frac{1}{2}(5+\cancel{\sqrt{5}}+6+5-\cancel{\sqrt{5}})=\frac{16}{2}=8$ より

△ABC の面積 $S$ は，ヘロンの公式から

$$S=\sqrt{\underbrace{s}_{8}\cdot(\underbrace{s-a}_{8-(5+\sqrt{5})})\cdot(\underbrace{s-b}_{8-6})\cdot(\underbrace{s-c}_{8-(5-\sqrt{5})})}$$

$=\sqrt{8\cdot(3-\sqrt{5})\cdot2\cdot(3+\sqrt{5})}$

$$=\sqrt{16\cdot\underbrace{(3-\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})}_{3^2-(\sqrt{5})^2=9-5=4}}=\sqrt{16\times4}=\sqrt{64}=8$$

次に，△ABC の内接円の半径 $r$ を求める公式は，

$\underbrace{S}_{8}=\underbrace{\frac{1}{2}(a+b+c)}_{s=8}\cdot r$ より，$8=8\cdot r$

よって，$r=1$ が求まるんだね。納得いった？