命題 "$2^{3n}-3^n$ は 5 の倍数である …(＊4) ($n=1, 2, 3, \cdots$)"
が成り立つことを数学的帰納法により示す。

(ⅰ) $n=1$ のとき　$2^{3\cdot1}-3^1=2^3-3=8-3=5$　　∴成り立つ。

(ⅱ) $n=k$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) のとき，

$2^{3k}-3^k=5m$ ……① (m：整数)

5×(整数)で，$2^{3k}-3^k$ が 5 の倍数であることを言っている。

すなわち，$2^{3k}=5m+3^k$ …①′ ← ①を後で使いやすい形にした！

が成り立つと仮定して，$n=k+1$ のときについて調べる。

$n=k+1$ のとき，

$$2^{3(k+1)}-3^{k+1}=2^{3k+3}-3^{k+1}=\boxed{2^3}\cdot2^{3k}-\boxed{3^1}\cdot3^k$$

n に $k+1$ を代入したもの　8　3

$=8\cdot2^{3k}-3\cdot3^k$

$5m+3^k$ (①′より) ← $n=k+1$ のとき，$2^{3(k+1)}-3^{k+1}$ が 5 の倍数であることを示すために，①，すなわち①′を使った。

$=8(5m+3^k)-3\cdot3^k=5\cdot8m+(8-3)\cdot3^k$

$=5(8m+3^k)=5\times$(整数) ← 5 の倍数ってこと！

整数 m に 8 をかけても整数，3 を k 回かけたものも整数だね。
∴ $8m+3^k=$(整数)+(整数)=(整数)となる。

∴ $n=k+1$ のときも，(＊4) は成り立つ。

以上(ⅰ)(ⅱ)より，すべての自然数 n に対して (＊4) は成り立つ。

どう？　数学的帰納法も慣れてくると，様々な問題の証明ができて面白いでしょう？

では，数列の講義の最後の問題として，数列の漸化式と数学的帰納法の融合問題にチャレンジしてみよう。ン？難しそうだって!? でも，これで解ける問題の幅がさらに広がるわけだから，楽しみながら解いてみよう！

練習問題 38	数学的帰納法 (iv)	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

数列 $\{a_n\}$ が，次のように定義されている。

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{n^2}{a_n} + 1$ ……① $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(1) a_2, a_3, a_4 を求めて，一般項 a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を推定せよ。

(2) (1) の一般項 a_n の推定式が，すべての自然数 n について成り立つことを数学的帰納法により証明せよ。

(1) ①の漸化式から，一般項 a_n を直接求めることは難しい。でも，①に $n = 1$，2，3 を順に代入すると，$a_2 = 2$，$a_3 = 3$，$a_4 = 4$ となるので，一般項 a_n は $a_n = n$ と推定できるんだね。ただし，これは，$n = 1, 2, 3, 4$ の結果からの，あくまでも推定式なので，これが本当の一般項 $a_n = n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と言えるためには，(2) で，これを数学的帰納法によって，証明しないといけないんだね。頑張ろう！

(1) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{n^2}{a_n} + 1$ ……① $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ について，

・①に $n = 1$ を代入すると，

$$a_2 = \frac{1^2}{\underset{1}{a_1}} + 1 = \frac{1^2}{1} + 1 = 1 + 1 = 2 \quad \cdots\cdots② \text{ となる。}$$

・①に $n = 2$ を代入すると，

$$a_3 = \frac{2^2}{\underset{2\ (②より)}{a_2}} + 1 = \frac{2^2}{2} + 1 = 2 + 1 = 3 \quad \cdots\cdots③ \text{ となる。}$$

・①に $n = 3$ を代入すると，

$$a_4 = \frac{3^2}{\underset{3\ (③より)}{a_3}} + 1 = \frac{3^2}{3} + 1 = 3 + 1 = 4 \quad \cdots\cdots④ \text{ となる。}$$

以上より，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 3$，$a_4 = 4$，となることが分かったので，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は，

$a_n = n$ ……(＊) $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と推定できるんだね。

(2) すべての自然数 n に対して，

$a_n = n \cdots\cdots (*)$

が成り立つことを数学的帰納法により証明しよう。

数学的帰納法
(i) $(*)$ が $n=1$ のとき，
$a_1 = 1$ となって成り立つ。
(ii) $(*)$ が，$n=k$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき成り立つと仮定して，$n=k+1$ のときも成り立つことを示す。

(i) $n=1$ のとき，$(*)$ は

$a_1 = \underline{1}$ となって，成り立つ。

これは，初項

(ii) $n=k$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき，

$a_k = k \cdots\cdots$④が成り立つと仮定して，$\underline{n=k+1}$ のときを調べる。

$n=k+1$ のとき，$a_{k+1}=k+1$ が成り立つことを示せばいいんだね。
この際に利用するのは，①の漸化式で，①の n に k を代入して，変形して，$a_{k+1}=k+1$ となること，すなわち $(*)$ が成り立つことを示そう！

①の n に k を代入すると，

$$a_{k+1} = \frac{k^2}{\underbrace{a_k}_{k\,(④より)}} + 1 \cdots\cdots ①' \quad となる。$$

①の漸化式を利用する。

成り立つと仮定した④式も利用できる！

この①′に，$a_k = k \cdots\cdots$④を代入すると，

$a_{k+1} = \dfrac{k^2}{k} + 1 = k+1$ となって，$\underline{n=k+1 のときも}$ $(*)$ は成り立つ。

$n=k+1$ のときの $(*)$ の式は，$a_{k+1}=k+1$ だからね。

以上 (i)(ii) により，数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して，$(*)$ は成り立つことが示された。つまり，一般項 a_n は，

$a_n = n \cdots\cdots (*)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ となることが証明できたんだね。

大変だったけれど，これで数学的帰納法もよく分かっただろう？ 後は，自分で納得がいくまで読み返して，そして今度は解答を見ずに自力で解いてみることだね。さらに，よく理解できるはずだ。

それでは次回から，また新たなテーマ“**確率分布と統計的推測**”に入ろう。また分かりやすく教えるから，キミ達も頑張ってついてきてくれ。それじゃ次回まで，さようなら…。