$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} - 3a_n = 4^n \cdots\cdots ② \\ a_{n+1} - 4a_n = 3^n \cdots\cdots ③ \end{cases}$$ より，

②－③を求めて，一般項 $a_n = 4^n - 3^n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ となる。

(2) $a_1 = 1,\ a_2 = 2$

$\underbrace{a_{n+2}}_{x^2} - 2\underbrace{a_{n+1}}_{x} - 3\underbrace{a_n}_{1} = 0 \cdots\cdots ④ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく。

①の特性方程式：$x^2 - 2x - 3 = 0$ を解いて，

$(x-3)(x+1) = 0 \qquad \therefore x = 3,\ -1$

この解 3 と －1 を用いて，④を変形すると，

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3 \cdot a_{n+1} = -1 \cdot (a_{n+1} - 3 \cdot a_n) \\ [\ F(n+1) = -1 \cdot F(n)\ ] \\ a_{n+2} + 1 \cdot a_{n+1} = 3 \cdot (a_{n+1} + 1 \cdot a_n) \\ [\ G(n+1) = 3 \cdot G(n)\ ] \end{cases}$$

$a_{n+2} - (-1)a_{n+1} = 3 \cdot \{a_{n+1} - (-1) \cdot a_n\}$

よって，

アッ！

という間

$$\begin{cases} a_{n+1} - 3a_n = (\overset{2}{\boxed{a_2}} - 3\overset{1}{\boxed{a_1}}) \cdot (-1)^{n-1} \\ [\ F(n) = F(1) \cdot (-1)^{n-1}] \\ a_{n+1} + a_n = (\overset{2}{\boxed{a_2}} + \overset{1}{\boxed{a_1}}) \cdot 3^{n-1} \\ [\ G(n) = G(1) \cdot 3^{n-1}] \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} - 3a_n = (-1)^n \cdots\cdots ⑤ \\ a_{n+1} + a_n = 3^n \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$ より，

⑥－⑤から，$4a_n = 3^n - (-1)^n$

よって，求める一般項 a_n は，$a_n = \dfrac{1}{4}\{3^n - (-1)^n\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

となって，答えだ。面白かった？

● 対称形の連立漸化式の解法パターンも覚えよう！

2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の対称形の連立漸化式を下に示そう。

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \cdots\cdots\cdots ㋐ \\ b_{n+1} = qa_n + pb_n \cdots\cdots\cdots ㋑ \end{cases}$$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ （p，q：定数係数）

㋐，㋑のように，右辺の対角線上の係数 p，q が等しい形のものを，対称形の連立漸化式というんだね。

$a_{n+1} = pa_n + qb_n$ ……㋐
$b_{n+1} = qa_n + pb_n$ ……㋑

この例題を1題，下に示そう。

3と3，2と2が等しい対称形の連立漸化式だね。

$a_1 = 3$，$b_1 = 2$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 2 \cdot b_n & \cdots\cdots\cdots ① \\ b_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3 \cdot b_n & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

・①，②の両辺に，$n = 1$ を代入すると，

$$\underbrace{a_2}_{a_{1+1}} = 3 \cdot \underbrace{a_1}_{3} + 2 \cdot \underbrace{b_1}_{2} = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$$

$$\underbrace{b_2}_{b_{1+1}} = 2 \cdot \underbrace{a_1}_{3} + 3 \cdot \underbrace{b_1}_{2} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12$$

・①，②の両辺に，$n = 2$ を代入すると，

$$\underbrace{a_3}_{a_{2+1}} = 3 \cdot \underbrace{a_2}_{13} + 2 \cdot \underbrace{b_2}_{12} = 3 \cdot 13 + 2 \cdot 12 = 39 + 24 = 63$$

$$\underbrace{b_3}_{b_{2+1}} = 2 \cdot \underbrace{a_2}_{13} + 3 \cdot \underbrace{b_2}_{12} = 2 \cdot 13 + 3 \cdot 12 = 26 + 36 = 62$$

………………………………………………　　　…………………

どう？ この要領で $a_1 = 3$，$a_2 = 13$，$a_3 = 63, \cdots$，$b_1 = 2$，$b_2 = 12$，$b_3 = 62, \cdots$ と，2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の各項が順に求められることが分かったと思う。

では，この①，②の2つの対称形の連立漸化式から，2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項 a_n と b_n をどのように求めるのか？ 知りたいところだろうね。複雑な話かって？ ううん，すごく簡単だよ。

対称形の連立の漸化式であれば，①＋②と，①－②を実行すれば，等比関数列型の漸化式：$F(n+1) = r \cdot F(n)$ を2つ導くことができるので，後はアッという間に解いて，一般項を求めることができるんだね。早速やってみよう！

①＋②より，$a_{n+1}+b_{n+1}=\underbrace{3a_n+2a_n}_{5a_n}+\underbrace{2b_n+3b_n}_{5b_n}$

$$a_{n+1}+b_{n+1}=5\cdot(a_n+b_n) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

$$[\ F(n+1)=5\cdot F(n)\ ]$$

公比 **5** の等比関数列だね。

$F(n)=a_n+b_n$ とおくと，n の代わりに $n+1$ を代入したものが，$F(n+1)$ より，$F(n+1)=a_{n+1}+b_{n+1}$ となるんだね。

①－②より，$a_{n+1}-b_{n+1}=\underbrace{3a_n-2a_n}_{1\cdot a_n}+\underbrace{2b_n-3b_n}_{-1\cdot b_n}$

$$a_{n+1}-b_{n+1}=1\cdot(a_n-b_n) \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

$$[\ G(n+1)=1\cdot G(n)\ ]$$

公比 **1** の等比関数列だね。

$G(n)=a_n-b_n$ とおくと，n の代わりに $n+1$ を代入したものが，$G(n+1)$ より，$G(n+1)=a_{n+1}-b_{n+1}$ となるんだね。

以上③，④より，

アッという間！

$$\cdot\ a_n+b_n=(\underbrace{\boxed{a_1}}_{3}+\underbrace{\boxed{b_1}}_{2})\cdot 5^{n-1}=5\cdot 5^{n-1}=5^n$$

$$[\ F(n)=F(1)\cdot 5^{n-1}\ ]$$

$$\cdot\ a_n-b_n=(\underbrace{\boxed{a_1}}_{3}-\underbrace{\boxed{b_1}}_{2})\cdot 1^{n-1}=1\cdot 1^{n-1}=1$$

$$[\ G(n)=G(1)\cdot 1^{n-1}\ ]$$

よって，$\begin{cases} a_n+b_n=5^n & \cdots\cdots\cdots ⑤ \\ a_n-b_n=1 & \cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases}$ より，一般項 a_n，b_n は

⑤＋⑥より，$2a_n=5^n+1$　　$\therefore a_n=\dfrac{1}{2}(5^n+1)$　$(n=1,2,\cdots)$　と求まり，

⑤－⑥より，$2b_n=5^n-1$　　$\therefore b_n=\dfrac{1}{2}(5^n-1)$　$(n=1,2,\cdots)$　と求まるんだね。どう？ これも面白かっただろう？

以上で，数列の漸化式の講義も終了です！ エッ，骨が折れたって!? そうだね。特に，今日の講義は内容満載だったからね。だから，**1** 回で理解しようと気負う必要はないよ。**2** 回，**3** 回…と繰り返し練習してマスターしていこう！

では，次回で数列も最終回だけれど，みんな元気でな。バイバイ…。