練習問題 54	曲線の長さ（Ⅰ）	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

曲線 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の長さ L を求めよ。

$y=f(x)$ の形の曲線なので，この $0\leqq x\leqq 1$ における曲線の長さ L は，公式 $L=\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ を用いて求めればいいんだね。

$$y=f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\quad\cdots\cdots①\quad(0\leqq x\leqq 1)$$ とおく。

①を x で微分して，

$$f'(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})'=\frac{1}{2}\{\underbrace{(e^x)'}_{e^x}+\underbrace{(e^{-x})'}_{-e^{-x}}\}$$

$$=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\quad\cdots\cdots②$$ となる。

よって，求める曲線の長さ L は，

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

曲線 $y=f(x)$ の長さ L の公式通りだ。

$$=\int_0^1\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right\}^2}\,dx\quad(②より)$$

$$1+\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2=\frac{4}{4}+\frac{1}{4}(e^{2x}-2\cdot\cancel{e^x}\cdot\cancel{e^{-x}}+e^{-2x})$$
$$=\frac{1}{4}(4+e^{2x}-2+e^{-2x})=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})$$
$$=\frac{1}{4}(e^{2x}+2\cdot e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x})=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$$

$$=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(e^x+e^{-x})\,dx$$

⊕

$\sqrt{a^2}=|a|$だけれど，$e^x+e^{-x}>0$ より $\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}=e^x+e^{-x}$ となる。

$$\therefore\ L=\frac{1}{2}\int_0^1(e^x+e^{-x})dx=\frac{1}{2}[e^x-e^{-x}]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\{e^1-e^{-1}-(\cancel{e^0-e^0})\}=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$ となって，答えだ！

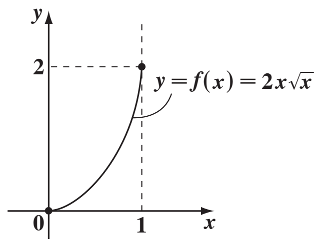
では，もう 1 題，$y=f(x)$ で表された曲線の長さを求めてみよう。

練習問題 55	曲線の長さ (Ⅱ)	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

曲線　$y=2x\sqrt{x}$　$(0\leqq x\leqq 1)$　の長さ L を求めよ。

これも，$y=f(x)$ の形で表された曲線なので，$0\leqq x\leqq 1$ における曲線の長さ L は，公式　$L=\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ で求めよう。

$y=f(x)=2x\cdot\underbrace{\sqrt{x}}_{x^{\frac{1}{2}}}=2x^{1+\frac{1}{2}}=2x^{\frac{3}{2}}$　……①　$(0\leqq x\leqq 1)$　とおく。



①を x で微分して，

$f'(x)=\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}x^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x}$　……②　となる。

よって，②より，求める曲線の長さ L は，

$L=\int_0^1\sqrt{1+\underbrace{\{f'(x)\}^2}_{(3\sqrt{x})^2=9x\ (②より)}}\,dx$ ← 曲線の長さの公式通り

$=\int_0^1\sqrt{\underbrace{1+9x}_{t}}\,dx$ ← ここで，$1+9x=t$ と置換して，置換積分にもち込めばうまく解けるよ！

ここで，$1+9x=t$　とおく。 ← 1st step

・$x:0\to 1$　のとき，$t:\underbrace{1}_{1+9\times 0}\to\underbrace{10}_{1+9\times 1}$ ← 2nd step

・$(1+9x)'dx=t'\cdot dt$　より，$9dx=dt$　$\therefore dx=\frac{1}{9}dt$ ← 3rd step

よって，

$$L=\int_0^1\sqrt{1+9x}\,dx=\int_1^{10}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{9}dt=\frac{1}{9}\int_1^{10}t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10}=\frac{2}{27}\Big(\underbrace{10^{\frac{3}{2}}}_{10\sqrt{10}}-\underbrace{1^{\frac{3}{2}}}_{1}\Big)=\frac{2}{27}(10\sqrt{10}-1)$$ となるんだね。

では次，媒介変数表示された曲線の長さを求めてみよう。

練習問題 56　曲線の長さ（Ⅲ）　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=2t^3 \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ の長さ L を求めよ。

今回は，媒介変数 t で表された曲線の長さ L を求める問題なので，公式 $L=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ を利用するんだね。頑張ろう！

曲線 $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=2t^3 \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ について，

x，y をそれぞれ t で微分して，

$$\frac{dx}{dt}=(3t^2)'=6t\ \cdots\cdots①\qquad \frac{dy}{dt}=(2t^3)'=6t^2\ \cdots\cdots②$$

よって，求める曲線の長さ L は，

$$L=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

曲線 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ の長さ L を求める公式通りだね。

$$=\int_0^1\sqrt{\underbrace{(6t)^2+(6t^2)^2}_{6^2t^2+6^2t^4=6^2t^2(1+t^2)}}\,dt=\int_0^1\sqrt{6^2t^2(1+t^2)}\,dt$$

①，②より

$$=6\int_0^1 t\cdot\sqrt{t^2+1}\,dt\quad\cdots\cdots③$$

$t\geqq 0$ より，$\sqrt{t^2}=|t|=t$ となった。

ここで，③の積分は，$t^2+1=u$ と置換すればいい。

$t:0\to 1$ のとき，$u:\underbrace{1}_{0^2+1}\to\underbrace{2}_{1^2+1}$ であり，また，

$(t^2+1)'dt = u'du$　より，　$2t \cdot dt = du$　$\therefore\ t\,dt = \frac{1}{2}du$

よって，③より

$$L = 6\underbrace{\int_0^1}_{1\to 2}\underbrace{\sqrt{t^2+1}}_{u}\cdot\underbrace{t\,dt}_{\frac{1}{2}du} = 6\int_1^2\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du$$

$$= 3\int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\,du = \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = 2\left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$= 2(2\sqrt{2}-1) = 4\sqrt{2}-2$　となって，答えだ！　大丈夫だった？

$L = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$　にしろ，$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$　にしろ，被積分関数に $\sqrt{\ }$ が入っているので，積分計算が結構大変になるんだね。でも，これで積分の計算力もさらにパワーアップするはずだ。

では，媒介変数表示された曲線の長さも，もう1題練習しておこう。

練習問題 57	曲線の長さ（Ⅳ）	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = 2t + \sin 2t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ の長さ L を求めよ。

媒介変数表示された曲線の長さ L の公式 $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ を使って求めよう。$\sqrt{\ }$ をはずす際に，半角の公式　$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$　が役に立つんだね。

曲線 $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = 2t + \sin 2t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$　について，

x，y をそれぞれ t で微分すると，

$\frac{dx}{dt} = (\cos 2t)' = -2\sin 2t$ ……①　$\frac{dy}{dt} = (2t+\sin 2t)' = 2+2\cos 2t$ ……②

①，②は，合成関数の微分だ！

以上①，②より，求める曲線の長さ L は，

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$ ← 公式通りだね。

$$(-2\sin2t)^2+(2+2\cos2t)^2=4\sin^2 2t+4+8\cos2t+4\cos^2 2t$$

$$=4(\underbrace{\sin^2 2t+\cos^2 2t}_{1})+4+8\cos2t$$

$$=8+8\cos2t=8(\underbrace{1+\cos2t}_{2\cos^2 t})$$

$$=16\cos^2 t$$

$$=(4\cos t)^2$$

半角の公式

$\cos^2 t=\dfrac{1+\cos2t}{2}$

を使った。

このように，$\sqrt{\ }$ 内を $(\cdots)^2$ の形にして $\sqrt{\ }$ をはずし，積分しやすくするのがコツなんだね。

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(4\cos t)^2}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=4\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$|4\cos t|=4\cos t$

$\cos t$ は 0 以上 $\left(\because 0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

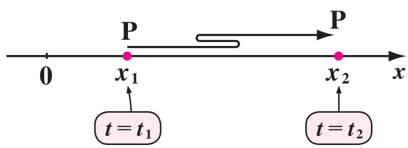
← 公式 $\sqrt{a^2}=|a|$ を使った！

$$=4\Big(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}-\underbrace{\cancel{\sin0}}_{0}\Big)=4$$ となって，答えだ！

● 直線上の動点 P について考えよう！

では次，図 2 に示すように，x 軸上を運動する動点 $\mathrm{P}(x)$ について考えよう。当然 x は，時刻 t の関数で，$x=f(t)$ と表されるとき，

図 2　直線上を動く点 P



速度 v は $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ で表されるんだったね。(P142)

また，図 2 では，時刻 t_1 で位置 x_1 にあった点 P が，時刻 t_2 では x_2 の位置

に移動している。つまり，$f(t_1)=x_1$，$f(t_2)=x_2$ だね。

この移動の変化量を S とおくと，

$$S=x_2-x_1=\int_{t_1}^{t_2} v\,dt \quad \cdots\cdots①$$

と表される。

①の右辺の積分を実際に計算すると，

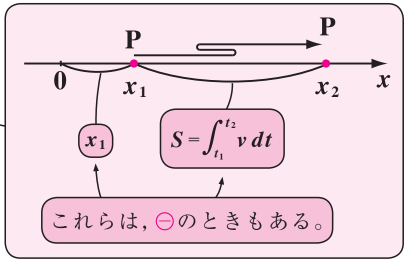
$$\int_{t_1}^{t_2} v\,dt=\int_{t_1}^{t_2} f'(t)\,dt=\left[f(t)\right]_{t_1}^{t_2}=f(t_2)-f(t_1)=x_2-x_1=S \quad (①より)$$

となって，ナルホド移動の変化量を表すからだ。したがって，

(Ⅰ) 時刻 t_2 における動点 $\mathbf{P}$ の位置 x_2 は

右図より

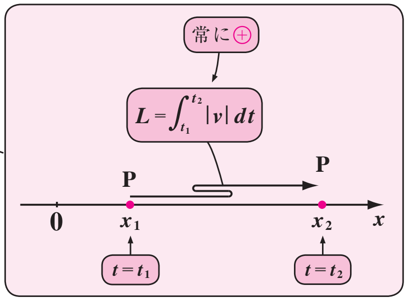
$$\underbrace{x_1}_{t=t_1\text{のときの位置}}\;\; x_2=x_1+\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} v\,dt}_{t_1\to t_2\text{での移動の変化量}} \cdots\cdots(*3)$$



となるんだね。これに対して，

(Ⅱ) 時刻 t_1 から t_2 の間に，動点 $\mathbf{P}$ が実際に動いた道のりを L とおくと，

$$L=\int_{t_1}^{t_2} |v|\,dt \cdots\cdots(*4)$$



となる。$(*4)$ では，速度の絶対値 $|v|$ を積分することにより，右図のように折り返して，動点 $\mathbf{P}$ が⊖の向きに移動したものも⊕の値として積分するから，実際に $t_1\to t_2$ の間に $\mathbf{P}$ が動いた道のり L を計算することができるんだね。

$(*3)$ と $(*4)$ の違いをシッカリ頭に入れておこう。

では，次の練習問題を解いてごらん。

練習問題 58	位置と道のり	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

x 軸上を運動する動点 $\mathrm{P}(x)$ がある。P は時刻 $t=0$ のとき $x=1$ にあり，また速度 v は，$v=\sin\frac{\pi}{2}t \quad (t\geqq 0)$ であるとする。

(1) 時刻 $t=3$ における，動点 P の位置 x を求めよ。

(2) 時刻 $t=0$ から $t=3$ の間に動点 P が移動した道のり L を求めよ。

(1) では，$x=1+\int_0^3 v\,dt$ を，(2) では，$L=\int_0^3 |v|\,dt$ を求めるんだね。

(1) $t=0$ のとき $x=1$，また $v=\sin\frac{\pi}{2}t$ より，時刻 $t=3$ における

動点 P の位置 (座標) は，次のように求まる。

$$x=1+\int_0^3 v\,dt=1+\int_0^3 \sin\frac{\pi}{2}t\,dt$$

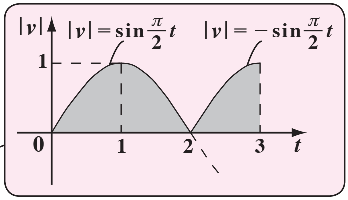
$$=1-\frac{2}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2}t\right]_0^3=1-\frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{\cancel{\cos\frac{3}{2}\pi}}_{0}-\underbrace{\cos 0}_{1}\Big)$$

$$=1+\frac{2}{\pi} \quad \text{となる。}$$

(2) $0\leqq t\leqq 3$ の間に，動点 P が実際に移動した道のり L は，

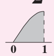
$$L=\int_0^3 |v|\,dt=\int_0^3 \left|\sin\frac{\pi}{2}t\right|dt$$

$$\begin{cases} 0\leqq t\leqq 2 \text{ のとき，} \sin\frac{\pi}{2}t\geqq 0 \\ 2\leqq t\leqq 3 \text{ のとき，} \sin\frac{\pi}{2}t\leqq 0 \end{cases}$$



$$=\int_0^2 \sin\frac{\pi}{2}t\,dt+\int_2^3\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

積分するグラフの形から，これは $3\times\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}t\,dt$

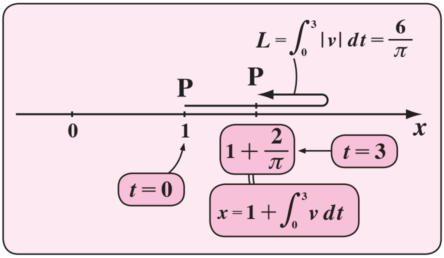
[$3\times$ ]

と計算してもいいよ。

$$=-\frac{2}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2}t\right]_0^2+\frac{2}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2}t\right]_2^3$$

$$=-\frac{2}{\pi}\big(\underbrace{\cos\pi}_{-1}-\underbrace{\cos 0}_{1}\big)+\frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{\cancel{\cos\frac{3}{2}\pi}}_{0}-\underbrace{\cos\pi}_{-1}\Big)=\frac{2}{\pi}(1+1+1)=\frac{6}{\pi}$$

右に，$t=3$ のときの P の位置(座標) x と，$0 \leqq t \leqq 3$ における P の道のり L の概略図を示すので，違いをシッカリ理解しよう。



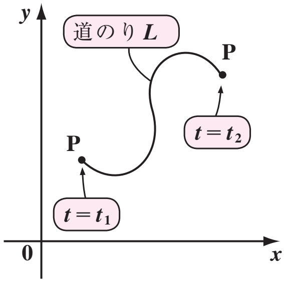
● 平面上を運動する点 P の道のり L も求めよう！

では次，図 3 に示すように，xy 平面上を運動する動点 P$(x,\ y)$ の座標 x と y は共に時刻 t の関数として，

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \quad (t：時刻)$$

と表されるのはいいね。このとき，P の速度と速さは

図 3　平面上を運動する動点 P の道のり L



$$\begin{cases} 速度 \quad \vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right) \\ 速さ \quad |\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} \end{cases}$$

となるので，(P144)

動点 P が，時刻 t_1 から t_2 の間に実際に移動する道のりを L とおくと，

$$L=\int_{t_1}^{t_2}|\vec{v}|\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \quad \cdots\cdots(*5)$$

となる。

ここでは，t は時刻としての物理的な意味をもつんだけれど，数学的には，これは，媒介変数 t で表示された曲線の長さ L の公式とまったく同じものであることが分かるはずだ。(P225)

では，次の練習問題を解いてみよう。

練習問題 59 動点 P の道のり (Ⅰ) CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

xy 座標平面上を運動する動点 $P(x, y)$ の x, y 座標が

$$\begin{cases} x = t^3 - 3t & \cdots\cdots① \\ y = 3t^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$ $(t$：時刻，$t \geqq 0)$ で与えられている。

$0 \leqq t \leqq 3$ の範囲で動いた動点 P の道のり L を求めよ。

公式 $L = \int_0^3 |\vec{v}|\,dt = \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ を使えばいいんだね。頑張ろう！

①，②を t で微分して，

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (t^3 - 3t)' = 3t^2 - 3 \\ \dfrac{dy}{dt} = (3t^2)' = 6t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t^3 - 3t & \cdots\cdots① \\ y = 3t^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

よって，$0 \leqq t \leqq 3$ の範囲で，動点 P が移動した道のり L は

$$L = \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^3 \sqrt{3^2(\underbrace{t^2+1}_{\oplus})^2}\,dt$$

$$\{3(t^2-1)\}^2 + (6t)^2 = 9(t^4 - 2t^2 + 1) + 36t^2$$
$$= 9(t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2) = 9(t^4 + 2t^2 + 1) = 3^2(t^2+1)^2$$

$$= 3\int_0^3 (t^2+1)\,dt = 3\left[\frac{1}{3}t^3 + t\right]_0^3 = 3\left\{\frac{27}{3} + 3 - \left(\cancel{\frac{0^3}{3} + 0}\right)\right\}$$

$= 3\ (9+3) = 36$ となって，答えだね。大丈夫だった？

では，道のりの問題をもう 1 題解いて，これで最終問題としよう。

練習問題 60 動点 P の道のり (Ⅱ) CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

xy 座標平面上を運動する動点 $P(x, y)$ の x, y 座標が

$$\begin{cases} x = \sin 2t & \cdots\cdots\cdots\cdots① \\ y = 2t - \cos 2t & \cdots\cdots② \end{cases}$$ $\left(t\text{：時刻},\ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ で与えられている。

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で動いた動点 P の道のり L を求めよ。

これも，公式 $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ を使って解けばいいんだね。練習問題 57 とよく似ているけれど，$\sqrt{\ }$ のはずし方が異なることに気を付けよう。今回は，2 倍角の公式 $\sin 2t=2\sin t\cos t$ を利用するとうまくいくんだね。

①，②を t で微分して，

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(\sin 2t)'=2\cos 2t \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=(2t-\cos 2t)'=2+2\sin 2t \end{cases}$$

合成関数の微分
$(\sin mt)'=m\cos mt$
$(\cos mt)'=-m\sin mt$

よって，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲で，動点 P が移動した道のり L は，

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\underline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}\,dt$$

$(2\cos 2t)^2+(2+2\sin 2t)^2=4\cos^2 2t+4+8\sin 2t+4\sin^2 2t$

$=4(\underbrace{\cos^2 2t+\sin^2 2t}_{1})+4+8\sin 2t$

$=8+8\sin 2t=8(\underbrace{1}_{\cos^2 t+\sin^2 t}+\underbrace{\sin 2t}_{2\sin t\cos t})$

2 倍角の公式
$\sin 2t=2\sin t\cos t$
を使った。

$=8(\cos^2 t+2\sin t\cos t+\sin^2 t)$

$=8(\cos t+\sin t)^2$

公式
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

これで，$\sqrt{\ }$ 内を$(\cdots)^2$の形にして，$\sqrt{\ }$ をはずせるんだね。
面白かっただろう？

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underline{\sqrt{8(\cos t+\sin t)^2}}\,dt$$

$\sqrt{8}\,|\underbrace{\cos t}_{0\text{ 以上}}+\underbrace{\sin t}_{0\text{ 以上}\left(\because\, 0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)}|=2\sqrt{2}(\cos t+\sin t)$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+\sin t)dt=2\sqrt{2}\Big[\sin t-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\sqrt{2}\Big\{\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}-\underbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}_{0}-(\underbrace{\cancel{\sin 0}}_{0}-\underbrace{\cos 0}_{1})\Big\}=2\sqrt{2}\cdot(1+1)=4\sqrt{2}$$

これで，曲線の長さや道のりの計算も，かなり自信が持てるようになったと思う。

以上で，「**初めから始める数学 III Part 2**」の講義もすべて終了です。みんな，本当によく頑張ったね。フ～，疲れたって？ …，そうだね，かなり内容が詰まった講義だったからね。だから，疲れたんだったら，休憩も必要だ。ゆっくり休んで，気分転換をはかるといい。でも，元気を取り戻したら，これまでの内容を自分で納得がいくまで，繰り返し反復練習して，是非マスターしてくれ！ これで，高校の授業の補習だけでなく，大学受験のための受験基礎力も身に付けることができるわけだからね。

キミ達の成長を楽しみにして…。ン？ 何 ?? えっ !? おなごりおしいって !? オイオイ…，キミ達の数学人生はまだ始まったばかりだよ。
この「**初めから始める数学**」**シリーズ**の講義は終了しても，この後に続く「**初めから解ける問題集**」**シリーズ**や「**元気が出る数学**」**シリーズ**，そして「**合格！ 数学**」**シリーズ**など…の講義でまた会おうな。キミ達が，さらに成長して，強くなっていくことを心より祈っている。それでは，みんな元気でな。さようなら…。

マセマ代表　馬場 敬之（けいし）