## ● 正規分布と誤差関数の関係も押さえておこう！

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ や標準正規分布 $N(0, 1)$ と似て非なる関数として，理工書では時々顔を出す“**誤差関数**”(*error function*) $erf(x)$ と，“**余誤差関数**” $erfc(x)$ についても解説しておこう。

まず，これらの関数 $erf(x)$ と $erfc(x)$ の定義を下に示そう。

**誤差関数と余誤差関数の定義**

(Ⅰ) 誤差関数の $erf(x)$ は，次式で定義される。

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du \quad \cdots\cdots(*a)$$

これに対して，

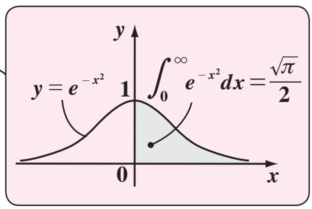
(Ⅱ) 余誤差関数の $erfc(x)$ は，次式で定義される。

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}du \quad \cdots\cdots(*a)'$$

この誤差関数や余誤差関数は，ガウスが測定誤差を評価するために導き出したものなんだ。ン？$(*a)$ や $(*a)'$ の積分に何故係数 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ がかかっているのか，気になるって？

それは無限積分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\cdots\cdots(*b)$ となるからなんだ。

$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$ の積分結果が，$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ となることは，P77 で既に解説した。ここで，$y = e^{-x^2}$ は，偶関数なので，右図に示すようなすり鉢型の $y$ 軸に関して左右対称なグラフとなるので，$(*b)$ が成り立つことが分かるはずだ。




よって，$(*b)$ の両辺に $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ $(\fallingdotseq 1.13)$ をかけると，

$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = 1$ $\cdots\cdots(*b)'$ となって，曲線 $y = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ $(0 \leqq x < \infty)$ と

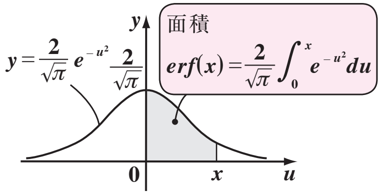
$x$ 軸とで挟まれる図形の面積が $1$ となって，正規化されるんだね。

ここで，変数を $x$ から $u$ に変えて，関数 $y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$ を，積分区間 $0 \leqq u \leqq x$ で積分したものが誤差関数 $erf(x)$ で，

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad \cdots\cdots (*a)$$

となる。これは，図 4 に示すように，$0 \leqq u \leqq x$ において，曲線 $y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$ と $u$ 軸とで挟まれる図形の面積に等しい。よって，$x$ の値を変化させると，$erf(x)$ の値も変化し，

図 4　誤差関数 $erf(x)$



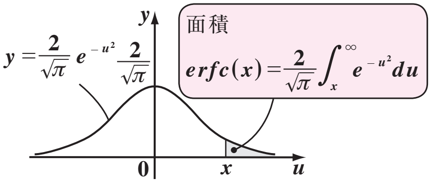

・$x = 0$ のとき，$erf(0) = 0$　　・$\lim_{x \to \infty} erf(x) = 1$　となる。

これ以外の $x$ の値のときの $erf(x)$ の値については，下の表 1 の関数表を利用して求めればいい。この表から，理論的には，$x \to \infty$ のとき $erf(x) \to 1$ となるのだけれど，実際にはこの有効数字で見ると，$x = 3.6$ の時点で既に $erf(x) = 1$ となってしまうのが分かると思う。

表 1　誤差関数 $erf(x)$ の関数表

| $x$ | $erf(x)$ | $x$ | $erf(x)$ | $x$ | $erf(x)$ | $x$ | $erf(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.000000 | 0.50 | 0.520500 | 1.00 | 0.842701 | 2.0 | 0.995322 |
| 0.05 | 0.056372 | 0.55 | 0.563323 | 1.1 | 0.880205 | 2.2 | 0.998137 |
| 0.10 | 0.112463 | 0.60 | 0.603856 | 1.2 | 0.910314 | 2.4 | 0.999311 |
| 0.15 | 0.167996 | 0.65 | 0.642029 | 1.3 | 0.934008 | 2.6 | 0.999764 |
| 0.20 | 0.222703 | 0.70 | 0.677801 | 1.4 | 0.952285 | 2.8 | 0.999925 |
| 0.25 | 0.276326 | 0.75 | 0.711156 | 1.5 | 0.966105 | 3.0 | 0.999978 |
| 0.30 | 0.328627 | 0.80 | 0.742101 | 1.6 | 0.976348 | 3.2 | 0.999994 |
| 0.35 | 0.379382 | 0.85 | 0.770668 | 1.7 | 0.983790 | 3.4 | 0.999998 |
| 0.40 | 0.428392 | 0.90 | 0.796908 | 1.8 | 0.989091 | 3.6 | 1.000000 |
| 0.45 | 0.475482 | 0.95 | 0.820891 | 1.9 | 0.992790 | … | ………… |

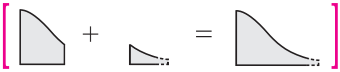
図 5　余誤差関数 $erfc(x)$




誤差関数 $erf(x)$ に対して，“**余誤差関数**” $erfc(x)$ は，

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du \quad \cdots\cdots(*a)'$$

で定義されるので，これは図 5 に示すように，$x \leqq u < \infty$ の範囲で，曲線 $y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$ と $u$ 軸とで挟まれる図形の面積になる。そして，当然：$erf(x) + erfc(x) = 1$　も成り立つんだね。



この誤差関数 $erf(x)$ や余誤差関数 $erfc(x)$ は偏微分方程式の解法でも出てくる重要な関数なので，頭に入れておくといいよ。

では，この誤差関数 $erf(x) = \int_0^x \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}}_{f_e(u)} du$ や余誤差関数 $erfc(x)$ の被積分関数を $f_e(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ とおいて，これを，標準正規分布 $f_S(x)$ や正規分布

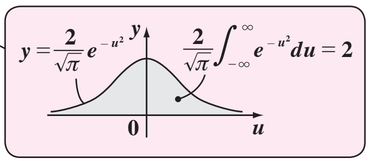
独立変数を $u$ から $x$ に戻した。

$f_N(x)$ と比較してみることにしよう。

まず，$f_e(x)$ は，確率密度にはなり得ないことは分かるね。誤差関数の性質として，

$\int_0^{\infty} f_e(u) du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 1$ だった。ということは，$e^{-u^2}$ は偶関数より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_e(u) du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 2$$




となるからだ。よって，この両辺を 2 で割ると

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} f_e(u) du = 1$ （全確率）となるので，

$\frac{1}{2}f_e(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ は，確率密度となり得るんだね。よってこれと，$f_S(x)$ や $f_N(x)$ を比較してみることにしよう。

(ⅰ) $\frac{1}{2}f_e(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ について，$x=\frac{z}{\sqrt{2}}$ とおくと，

$x:-\infty\to\infty$ のとき，$z:-\infty\to\infty$，$dx=\frac{1}{\sqrt{2}}dz$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}f_e(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\boxed{f_S(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}}}dz$$ となって，

標準正規分布の確率密度 $f_S(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ が導けるんだね。また，

(ⅱ) $\frac{1}{2}f_e(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ について，$x=\frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ $(\mu>0,\ \sigma>0)$ とおくと，

$x:-\infty\to\infty$ のとき，$t:-\infty\to\infty$，$dx=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}dt$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}f_e(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}}_{\boxed{f_N(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}}dt$$ となって，

正規分布の確率密度 $\underbrace{f_N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}_{\boxed{\text{変数を } t \text{ から } x \text{ に戻して，示した。}}}$ も導けるんだね。

このように，誤差関数 $erf(x)$ や余誤差関数 $erfc(x)$ は，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ や正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ とは直接関係があるわけではないけれど，その被積分関数 $f_e(x)$ を $2$ で割ったものは，標準正規分布や正規分布の確率密度に変換できることが分かったんだね。それぞれ，混乱しないように，区別して使い分けてほしい。