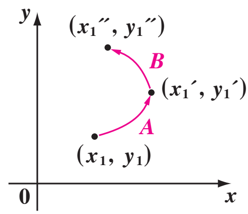
§2. 行列による点の移動をマスターしよう！

2次の正方行列を使って，xy 座標平面上の点を移動させることができる。ここでは，**合成変換**や**回転**も含めて，点の移動を詳しく解説する。

● 2次の正方行列により，点が移動する！

2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を使った次の式により，図1に示すように，点 $(x_1,\ y_1)$ を点 $(x_1',\ y_1')$ に移動させることができる。

図1　2次の正方行列による点の移動のイメージ



$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\ \cdots\cdots ㋐$$

$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1+by_1 \\ cx_1+dy_1 \end{pmatrix}$ として，$(x_1',\ y_1')$ が計算できる。

ここでさらに，$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ を使った次式により，点 $(x_1',\ y_1')$ を点 (x_1'',y_1'') に移動させることもできる。

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ y_1'' \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}\ \cdots\cdots ㋑$$

これも，**Tokyo** 発，**SF** 経由，**NY** 行きを，**Tokyo** から **NY** に直航便を飛ばすパターンが合成変換になる！

以上を模式図的に描くと

$$(x_1,\ y_1)\xrightarrow{A}(x_1',\ y_1')\xrightarrow{B}(x_1'',\ y_1'')$$

となる。

BA ← 合成変換の行列

ここで，点 $(x_1,\ y_1)$ から直接 $(x_1'',\ y_1'')$ に移動させたかったならば，㋐を㋑に代入して

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ y_1'' \end{pmatrix}=\underbrace{B}_{後}\underbrace{A}_{先}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\ \cdots\cdots ㋒$$

を用いればいい。これを，

合成変換といい，この合成変換に使われる2次の正方行列は $\underline{BA}$ となることに注意しよう。

まず，A が $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ に作用して，その後で B がかかるので，BA の形の積になる。

それではここで，典型的な点の移動を表す行列を下にまとめて示す。

典型的な点の移動

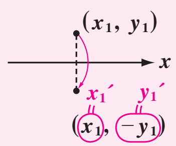
(i) x 軸に関して対称移動させる行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) y 軸に関して対称移動させる行列 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

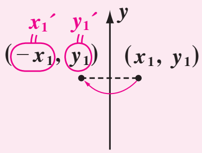
(iii) 原点に関して対称移動させる行列 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iv) $y=x$ に関して対称移動させる行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

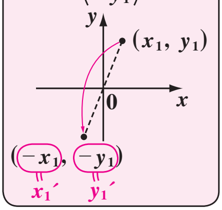
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}$$



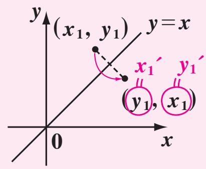
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$



例題で練習しておこう。点 $(2,\ -1)$ を (ア) y 軸に関して対称移動した後，(イ) 直線 $y=x$ に関して対称移動させると，どのような点に移るか求めてみよう。(ア)(イ) の合成変換後の点の座標を $(\alpha,\ \beta)$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{(イ) } y=x \text{ に関して対称移動 (後)}}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{(ア) } y \text{ 軸に関して対称移動 (先)}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ となるので，

点 $(2,\ -1)$ はこの合成変換により点 $(-1,\ -2)$ に移される。これで，点の移動にも少しは慣れた？

それでは次に入ろう。2 組の点の移動が与えられれば，それからその点の移動に使われた 2 次の正方行列 A を逆に求めることができる。これを実際に例題で練習しておこう。

◆ はじめに ◆

みなさん，こんにちは。数学の馬場敬之(ばばけいし)です。これから解説する数学Ⅲ・Cでは，“**数列・関数の極限**”や“**微分・積分**”，そして“**行列**”など，高校数学の中でも最も思考力，応用力が試される分野が目白押しなんだね。そして，理系の受験では**「数学Ⅲ・Cを制する者は受験を制する！」**と言われる位重要な科目でもあるんだ。この数学Ⅲ・Cを基本から標準入試問題レベルまでスバラシク親切に解説するために，
高杉 豊先生と共著で，この**「合格！数学Ⅲ・C」**を書き上げた。
本書をマスターすれば，難関大を除くほとんどの大学に合格するだけの実力を養うことが出来る。

だから，理系への進学を考えている人は，まず本書の**「流し読み」**から入ってみるといい。よく分からないところがあってもかまわないから，全体を通し読みしてごらん。これで，数学Ⅲ・Cの全貌がスムーズに頭の中に入ってくるはずだ。この流し読みだけなら1週間もあれば出来るはずだ。その後は，各章の解説文を**「精読」**して，シッカリ理解することだ。そして，自信がついたら，今度は精選された“**例題**”や“**演習問題**”を**「自力で解き」**，さらに納得がいくまで**「繰り返し解いて」**，マスターしていけばいいんだね。この**「反復練習」**により，本物の数学的な思考力が養えて，これまで難攻不落に思えた本格的な受験問題も，面白いように解けるようになるはずだ。頑張ろう！

「今，日本の数学の教材で，マセマは最高峰に位置している。」と言われている。そして，**「本書がある限り，理系をあきらめる必要はまったくない！」**　キミの多くの先輩たちが学んだ，この定評と実績のあるマセマの参考書で，今度はキミ自身の夢を是非実現させてほしいものだ。それが，ボク達マセマの講師陣の心からの願いなんだ。**「キミの夢は必ず叶う！」**

マセマ代表 馬場 敬之

携帯電話でマセマの
HPにアクセスできます。
(対応できない機種の方は，
http://www.mathema.jp からどうぞ)

目 次

数学Ⅲ

講義1 数列の極限

講義2 関数の極限

講義3 微分法とその応用

講義4 積分法とその応用

◆ 数学 C ◆

講義 5 式と曲線

講義 6 行列とその応用

講義 7 確率分布